Министерство образования Российской Федерации

"МАТИ"- РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО

Кафедра "Высшая математика"

А. В. Жемерев

ВВЕДЕНИЕ В БУЛЕВУ ЛОГИКУ

Методическое пособие для студентов 2-го факультета МАТИ

Москва 2003 г.

Оглавление

1. Введение

Математическая или формальная логика делится на три подраздела: *логика Буля*, *логика высказываний* и *логика предикатов*.

"Логика Буля" или "булева логика" основывается на *отношении эквивалентности*, при котором правая часть равенства всегда содержит столько же истины, сколько и левая. Строго говоря, в этом случае не происходит не происходит приращения нового знания.

Два последующих подраздела, "Логика высказываний" и "Логика предикатов", базируются на *отношении порядка*, при котором правая часть выражения (*заключение*) содержит больше "истины", чем левая (*посылки*), т.е. "истинность" заключения оказывается выше "истинности" посылок.

Обычно операции булевой логики вводятся через понятие "множество" и операций между множествами.

В настоящем пособии операции булевой логики вводятся аксиоматически, не прибегая к понятиям и операциям между множествами.

Введем некоторые понятия.

Под *множеством* понимается совокупность элементов любой природы, подчиняющихся счету.

Множество истиностных значений есть множество, состоящее из двух истиностных значений:

$\{0, 1\}$ или $\{\mathrm{FALSE}, \mathrm{TRUE}\}$ или $\{\text{ИСТИНА}, \text{ЛОЖЬ}\}$.

В дальнейшем для упрощения записи будем использовать $\{0, 1\}$.

Логической переменной называется переменная, принимающая одно из истиностных значений.

Логической функцией называется функция, зависящая от одной или нескольких логических переменных, которая принимает одно из истиностных значений в зависимости от значений логических переменных.

Отрицанием логической переменной $\mathbf{x}$ (логической функции $\mathbf{y}(\mathbf{x})$) называется логическая величина $\overline{\mathbf{x}}$ ($\overline{\mathbf{y}(\mathbf{x})}$) (читается не – $\overline{\mathbf{x}}$) (не – ($\overline{\mathbf{y}(\mathbf{x})}$). Отрицание имеет другое истиностное значение, чем $\mathbf{x}$ ($\mathbf{y}(\mathbf{x})$).

Таблицей истиности логической функции, зависящей от одной или нескольких переменных, называется таблица, в которой представлены значений логической функции в зависимости от значений логических переменных, определяющих эту функцию.

2. Операции булевой логики

Между логическими переменными и логическим функциями возможны восемь логических операций. Перечислим их.

Дизъюнкцией называется логическая операция, определяемая логическим символом $\vee$.

Конъюнкцией называется логическая операция, определяемая логическим символом $\wedge$.

Стрелкой Пирса называется логическая операция, определяемая логическим символом $\downarrow$.

Штрихом Шеффера называется логическая операция, определяемая логическим символом $|$.

Разностью называется логическая операция, определяемая логическим символом $-$.

Импликацией называется логическая операция, определяемая логическим символом $\rightarrow$.

Симметрической разностью называется логическая операция, определяемая логическим символом $+$.

Эквивалентностью называется логическая операция, определяемая логическим символом $\sim$.

Приведем их в виде таблицы

Таблица 1. Операции булевой логики

	Название операции	Символ операции
1	Дизъюнкция	$\vee$
2	Конъюнкция	$\wedge$
3	Стрелка Пирса	$\downarrow$
4	Штрих Шеффера	$\vert$
5	Разность	$-$
6	Импликация	$\rightarrow$
7	Симметрическая разность	$+$
8	Эквивалентность	$\sim$

3. Булевы функции от двух переменных

Булевых функций от двух переменных, как и операций булевой логики насчитывается восемь.

3.1. Дизъюнкция и конъюнкция

Дизъюнкцией от двух переменных называется логическая функция от двух переменных, связанная символом логической связки $\vee$.

Таблица 2. Таблица истинности для дизъюнкции от двух переменных

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{y_\vee(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2}$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

Отметим, что логический символ $\vee$ можно передать словами "*или/и*" . Т.е. дизъюнкция $x_1 \vee x_2$ передается как "*или*" $\mathbf{x_1}$, "*или*"$\mathbf{x_2}$, либо "*и*" $\mathbf{x_1}$ "*и*" $\mathbf{x_2}$.

Конъюнкцией от двух переменных называется логическая функция от двух переменных, связанная символом логической связки $\wedge$.

Таблица 3. Таблица истинности для коньюнкции от двух переменных

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{y_\wedge(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2}$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Отметим, что логический символ $\wedge$ можно передать словами "*и*". Т.е. конъюнкция $x_1 \wedge x_2$ передается как "*и*" $\mathbf{x_1}$ "*и*" $\mathbf{x_2}$.

Если в таблице истинности для дизъюнкции (таблица 2) все нули заменить единицами, а все единицы – нулями, то в итоге получим таблицу 3.

Это определяет взаимную *двойственность* конъюнкции и дизъюнкции, которая выражается логическими соотношенями:

$$\mathbf{x_1 \vee x_2 = \overline{x_1 \wedge x_2}},$$

$$\mathbf{\overline{x_1 \vee x_2} = x_1 \wedge x_2}.$$

3.2. Стрелка Пирса и штрих Шеффера

Введем две новых булевых функции, которые взаимно двойственны по отношению друг к другу: *стрелка Пирса* и *штрих Шеффера*.

Стрелкой Пирса от двух переменных называется логическая функция от двух переменных, связанная символом логической связки $\downarrow$.

Таблица 4. Таблица истинности для стрелки Пирса от двух переменных

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{y_{\downarrow}(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2}$
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	0

Штрихом Шеффера от двух переменных называется логическая функция от двух переменных, связанная символом логической связки $|$.

Таблица 5 . Таблица истинности для штриха Шеффера от двух переменных

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{y_{|}(x_1, x_2) = x_1 \mid x_2}$
0	0	1
1	0	1
0	1	1
1	1	0

Сравнивая таблицы истинности стрелки Пирса и штриха Шеффера, нетрудно заметить следующие логические соотношения:

$$\mathbf{x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \mid x_2}},$$

$$\mathbf{\overline{x_1 \downarrow x_2} = x_1 \mid x_2}.$$

Сравнивая таблицы истинности стрелки Пирса и штриха Шеффера с таблицами истинности дизъюнкции и конъюнкции, нетрудно заметить следующие логические соотношения:

$$\mathbf{x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2}};$$

$$\mathbf{\overline{x_1 \downarrow x_2} = x_1 \vee x_2};$$

$$\mathbf{x_1 \mid x_2 = \overline{x_1 \wedge x_2}};$$

$$\mathbf{\overline{x_1 \mid x_2} = x_1 \wedge x_2}.$$

3.3. Разность и импликация

Введем две новых булевых функции, которые взаимно двойственны по отношению друг к другу: *Разность от двух логических переменных* и *Импликация от двух логических переменных.*

Разностью от двух логических переменных называется логическая функция от двух логических переменных, связанная символом логической связки $-$.

Таблица 6. Таблица истинности для разности от двух логических переменных

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{y_-(x_1, x_2) = x_1 - x_2}$
0	0	0
1	0	1
0	1	0
1	1	0

Импликацией от двух переменных называется логическая функция от двух переменных, связанная символом логической связки $\rightarrow$.

Таблица 7. Таблица истинности для импликации от двух переменных

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{y_\rightarrow(x_1, x_2) = x_1 \rightarrow x_2}$
0	0	1
1	0	0
0	1	1
1	1	1

Сравнивая таблицы истинности дляя разности и импликации , нетрудно заметить следующие логические соотношения:

$$\mathbf{x_1 - x_2 = \overline{x_1 \rightarrow x_2}};$$

$$\mathbf{\overline{x_1 - x_2} = x_1 \rightarrow x_2}.$$

Отметим, что импликация передается словами "если" x_1, "то" x_2.

3.4. Симметрическая разность и эквивалентность

Введем две новых булевых функции, которые взаимно двойственны по отношению друг к другу: *Симметрическая разность* и *эквивалентность.*

Симметрической разностью от двух переменных называется логическая функция от двух переменных, связанная символом логической связки $+$.

Таблица 8. Таблица истинности для симметрической разности от двух переменных

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{y_+(x_1, x_2) = x_1 + x_2}$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

Эквивалентностью от двух переменных называется логическая функция от двух переменных, связанная символом логической связки $\sim$.

Таблица 9. Таблица истинности для эквивалентности от двух переменных

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{y_\sim(x_1, x_2) = x_1 \sim x_2}$
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Сравнивая таблицы истинности для симметрической разности и эквивалентности, нетрудно заметить следующие логические соотношения:

$$\mathbf{x_1 + x_2 = \overline{x_1 \sim x_2}};$$

$$\mathbf{\overline{x_1 + x_2} = x_1 \sim x_2}.$$

Отметим, что симметрическая разность имеет несколько названий: *строгая дизъюнкция, исключительная альтернатива, сумма по модулю два.*

Эту операцию можно передать словами – "или" x_1 "или" x_2", т.е. это логическая связка "или", но без включенной в не связки "и".

Отметим, что под суммой по модулю два понимается следующее: если алгебраическая сумма нескольких целых величина равна четной величине, то сумма по модулю два равна нулю, если нечетной, то сумма по модулю два равна единице.

Например:

$$(1+2+3+4)_{\mathbf{mod2}} = 0;$$

$$(1+2+3+5)_{\mathbf{mod2}} = 1.$$

4. Тавтология и противоречие

Тавтологией называется логическая функция от одной или нескольких переменных, которая при любых значениях переменных принимает значение **TRUE** или 1.

Противоречием называется логическая функция от одной или нескольких переменных, которая при любых значениях переменных принимает значение **FALSE** или 0.

Примером тавтологии может являться логическая функция от одной переменной

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \vee \overline{\mathbf{x}} = \mathbf{1}.$$

Примером противоречия может являться логическая функция от одной переменной

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \wedge \overline{\mathbf{x}} = \mathbf{0}.$$

В этом нетрудно убедиться, составив соответствующие таблицы истинности для функций $\mathbf{y}(\mathbf{x})$.

5. Понятие конституенты

Под конституентой понимается логическое выражение состоящее из логических переменных и функций, связанных между собой посредством логических операций.

Если логические переменные и функции в конституенте связаны лишь знаками конъюнкции (дизъюнкции), то такая конституента называется конституента-конъюнкт (конституента-дизъюнкт) или просто конъюнкт (дизъюнкт).

Например, рассмотрим следующее логическое выражение:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \vee \mathbf{c} \vee \mathbf{d}.$$

Это просто конституента.

Если ее записать в виде:

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \vee (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}),$$

то это будет конъституента-дизъюнкт.

А если ее записать в виде:

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \vee \mathbf{c}) \wedge \mathbf{d},$$

то это будет конъституента-конъюнкт.

6. Формы представления булевых функций от двух переменных

Любую булеву функцию $y = f(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ можно представить как некоторую комбинацию конституент:

$$\mathbf{C_0} = \overline{\mathbf{a}} \wedge \overline{\mathbf{b}}, \quad \mathbf{C_1} = \mathbf{a} \wedge \overline{\mathbf{b}}, \quad \mathbf{C_2} = \overline{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{b}, \quad \mathbf{C_3} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}.$$

где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ – логические переменные.

Тогда в зависимости от значения функции и заданных конституент C_i, получается шестнадцать логических операций:

$$\mathbf{y} = [\mathbf{C_0} \wedge \mathbf{f(0,0)}] \vee [\mathbf{C_1} \wedge \mathbf{f(1,0)}] \vee [\mathbf{C_2} \wedge \mathbf{f(0,1)}] \vee [\mathbf{C_3} \wedge \mathbf{f(1,1)}]$$

или

$$\mathbf{y} = [\overline{\mathbf{a}} \wedge \overline{\mathbf{b}} \wedge \mathbf{f(0,0)}] \vee [\mathbf{a} \wedge \overline{\mathbf{b}} \wedge \mathbf{f(1,0)}] \vee [\overline{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{f(0,1)}] \vee [\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{f(1,1)}]$$

Подобная форма представления логических функций называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (СДНФ).

Отметим, что конституенты в СДНФ представлены в виде конъюнктов, соединенных между собой логическими символами дизъюнкции.

В логике Буля действует *принцип двойственности*, который гласит: при одновременной замене символов $\wedge \Leftrightarrow \vee$ и $1 \Leftrightarrow 0$ все логические равенства остаются в силе.

Поэтому СДНФ можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{y} = [\overline{\mathbf{a}} \vee \overline{\mathbf{b}} \vee \mathbf{f}(\mathbf{0},\mathbf{0})] \wedge [\mathbf{a} \vee \overline{\mathbf{b}} \vee \mathbf{f}(\mathbf{1},\mathbf{0})] \wedge [\overline{\mathbf{a}} \vee \mathbf{b} \vee \mathbf{f}(\mathbf{0},\mathbf{1})] \wedge [\mathbf{a} \vee \mathbf{b} \wedge \mathbf{f}(\mathbf{1},\mathbf{1})]$$

Эта форма представления называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой* (СКНФ).

Здесь конституенты представлены в виде дизъюнктов.

Соединены эти дизъюнкты конъюнкцией, отсюда и название – СКНФ.

Таким образом, любую булеву функцию можно определить, используя лишь две логических операции: дизъюнкцию и конъюнкцию.

Существует еще и третья форма – *совершенная полиномиальная нормальная форма* (СПНФ). Ее можно получить из СДНФ путем замены:

$$\mathbf{a} \vee \mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{ab},$$

$$\overline{\mathbf{a}} = \mathbf{1} + \mathbf{a}.$$

Поэтому можно сразу же записать (в СПНФ символ конъюнкции опускается, а вместо дизъюнкции ставится (+):

$$\mathbf{y} = [(\mathbf{1}+\mathbf{a})(\mathbf{1}+\mathbf{b})\mathbf{f}(\mathbf{0},\mathbf{0})] + [\mathbf{a}(\mathbf{1}+\mathbf{b})\mathbf{f}(\mathbf{1},\mathbf{0})] + [(\mathbf{1}+\mathbf{a})\mathbf{b}\mathbf{f}(\mathbf{0},\mathbf{1})] + [\mathbf{ab}\mathbf{f}(\mathbf{1},\mathbf{1})]$$

или, приведя подобные члены

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{0},\mathbf{0}) + \mathbf{a}[\mathbf{f}(\mathbf{0},\mathbf{0}) + \mathbf{f}(\mathbf{1},\mathbf{0})] + \mathbf{b}[\mathbf{f}(\mathbf{0},\mathbf{0}) + \mathbf{f}(\mathbf{0},\mathbf{1})] +$$

$$+\mathbf{ab}[\mathbf{f}(\mathbf{0},\mathbf{0}) + \mathbf{f}(\mathbf{1},\mathbf{0}) + \mathbf{f}(\mathbf{0},\mathbf{1}) + \mathbf{f}(\mathbf{1},\mathbf{1})]$$

В таблицах 10 – 12 приведен полный список *элементарных логических функций* от двух переменных в трех *совершенных формах* – СДНФ, СКНФ и СПНФ.

Совершенные формы представлений позволяют выразить аналитической формулой любую функцию, если известна ее таблица истинности.

Таблица 10. Элементарные логические функции от двух переменных в совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ)

$y = f(\mathbf{a}, \mathbf{b})$	СДНФ
$y_0 = 0$	$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \vee (\overline{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{b}) \vee (\mathbf{a} \wedge \overline{\mathbf{b}}) \vee (\overline{\mathbf{a}} \wedge \overline{\mathbf{b}})$
$y_1 = \mathbf{a} \vee \mathbf{b}$	$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \vee (\overline{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{b}) \vee (\mathbf{a} \wedge \overline{\mathbf{b}})$
$y_2 = \mathbf{b} - \mathbf{a}$	$\overline{\mathbf{a}} \vee \mathbf{b} = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \vee (\overline{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{b}) \vee (\overline{\mathbf{a}} \wedge \overline{\mathbf{b}})$
$y_3 = \mathbf{b}$	$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \vee (\overline{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{b})$
$y_4 = \mathbf{a} - \mathbf{b}$	$\mathbf{a} \vee \overline{\mathbf{b}} = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \vee (\mathbf{a} \wedge \overline{\mathbf{b}}) \vee (\overline{\mathbf{a}} \wedge \overline{\mathbf{b}})$
$y_5 = \mathbf{a}$	$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \vee (\mathbf{a} \wedge \overline{\mathbf{b}})$
$y_6 = \mathbf{a} + \mathbf{b}$	$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \vee (\overline{\mathbf{a}} \wedge \overline{\mathbf{b}})$
$y_7 = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$	$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \vee (\overline{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{b}) \vee (\mathbf{a} \wedge \overline{\mathbf{b}})$
$y_8 = \mathbf{a} \downarrow \mathbf{b}$	$\overline{\mathbf{a}} \vee \overline{\mathbf{b}} = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \vee (\overline{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{b}) \vee (\overline{\mathbf{a}} \wedge \overline{\mathbf{b}})$
$y_9 = \mathbf{a} \sim \mathbf{b}$	$(\overline{\mathbf{a}} \wedge \overline{\mathbf{b}}) \vee (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = (\overline{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{b}) \vee (\mathbf{a} \wedge \overline{\mathbf{b}})$
$y_{10} = \overline{\mathbf{a}}$	$(\overline{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{b}) \vee (\overline{\mathbf{a}} \wedge \overline{\mathbf{b}})$
$y_{11} = \mathbf{a} \to \mathbf{b}$	$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \vee (\overline{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{b}) \vee (\overline{\mathbf{a}} \wedge \overline{\mathbf{b}}) = \mathbf{b} \vee \overline{\mathbf{a}}$
$y_{12} = \overline{\mathbf{b}}$	$(\mathbf{a} \wedge \overline{\mathbf{b}}) \vee (\overline{\mathbf{a}} \wedge \overline{\mathbf{b}})$
$y_{13} = \mathbf{b} \to \mathbf{a}$	$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \vee (\mathbf{a} \wedge \overline{\mathbf{b}}) \vee (\overline{\mathbf{a}} \wedge \overline{\mathbf{b}}) = \mathbf{a} \vee \overline{\mathbf{b}}$
$y_{14} = \mathbf{a} \mid \mathbf{b}$	$(\overline{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{b}) \vee (\mathbf{a} \wedge \overline{\mathbf{b}}) \vee (\overline{\mathbf{a}} \wedge \overline{\mathbf{b}})$
$y_{15} = \mathbf{1}$	$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \vee (\overline{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{b}) \vee (\mathbf{a} \wedge \overline{\mathbf{b}}) \vee (\overline{\mathbf{a}} \wedge \overline{\mathbf{b}})$

Таблица 11. Элементарные логические функции от двух переменных в совершенной конъюнктивной нормальной форме (СКНФ)

$y = f(\mathbf{a}, \mathbf{b})$	СКНФ
$y_0 = 0$	$(\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge (\overline{\mathbf{a}} \vee \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a} \vee \overline{\mathbf{b}}) \wedge (\overline{\mathbf{a}} \vee \overline{\mathbf{b}})$
$y_1 = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$	$(\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge (\overline{\mathbf{a}} \vee \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a} \vee \overline{\mathbf{b}})$
$y_2 = \mathbf{b} - \mathbf{a}$	$\overline{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{b} = (\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge (\overline{\mathbf{a}} \vee \mathbf{b}) \wedge (\overline{\mathbf{a}} \vee \overline{\mathbf{b}})$
$y_3 = \mathbf{b}$	$(\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge (\overline{\mathbf{a}} \vee \mathbf{b})$
$y_4 = \mathbf{a} - \mathbf{b}$	$\mathbf{a} \wedge \overline{\mathbf{b}} = (\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a} \vee \overline{\mathbf{b}}) \wedge (\overline{\mathbf{a}} \vee \overline{\mathbf{b}})$
$y_5 = \mathbf{a}$	$(\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a} \vee \overline{\mathbf{b}})$
$y_6 = \mathbf{a} + \mathbf{b}$	$(\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge (\overline{\mathbf{a}} \vee \overline{\mathbf{b}})$
$y_7 = \mathbf{a} \vee \mathbf{b}$	$(\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge (\overline{\mathbf{a}} \vee \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a} \vee \overline{\mathbf{b}})$
$y_8 = \mathbf{a} \downarrow \mathbf{b}$	$\overline{\mathbf{a}} \wedge \overline{\mathbf{b}} = (\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge (\overline{\mathbf{a}} \vee \mathbf{b}) \wedge (\overline{\mathbf{a}} \vee \overline{\mathbf{b}})$
$y_9 = \mathbf{a} \sim \mathbf{b}$	$(\overline{\mathbf{a}} \vee \overline{\mathbf{b}}) \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) = (\overline{\mathbf{a}} \vee \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a} \vee \overline{\mathbf{b}})$
$y_{10} = \overline{\mathbf{a}}$	$(\overline{\mathbf{a}} \vee \mathbf{b}) \wedge (\overline{\mathbf{a}} \vee \overline{\mathbf{b}})$
$y_{11} = \mathbf{a} \to \mathbf{b}$	$(\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge (\overline{\mathbf{a}} \vee \mathbf{b}) \wedge (\overline{\mathbf{a}} \vee \overline{\mathbf{b}}) = \mathbf{b} \wedge \overline{\mathbf{a}}$
$y_{12} = \overline{\mathbf{b}}$	$(\mathbf{a} \vee \overline{\mathbf{b}}) \wedge (\overline{\mathbf{a}} \vee \overline{\mathbf{b}})$
$y_{13} = \mathbf{b} \to \mathbf{a}$	$(\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a} \vee \overline{\mathbf{b}}) \wedge (\overline{\mathbf{a}} \vee \overline{\mathbf{b}}) = \mathbf{a} \wedge \overline{\mathbf{b}}$
$y_{14} = \mathbf{a} \mid \mathbf{b}$	$(\overline{\mathbf{a}} \vee \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a} \vee \overline{\mathbf{b}}) \wedge (\overline{\mathbf{a}} \vee \overline{\mathbf{b}})$
$y_{15} = \mathbf{1}$	$(\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge (\overline{\mathbf{a}} \vee \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a} \vee \overline{\mathbf{b}}) \wedge (\overline{\mathbf{a}} \vee \overline{\mathbf{b}})$

Таблица 12. Элементарные логические функции от двух переменных в совершенной полиномиальной нормальной форме (СПНФ)

$y = f(\mathbf{a}, \mathbf{b})$	СПНФ
$y_0 = \mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$y_1 = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$	$\mathbf{ab}$
$y_2 = \mathbf{b} - \mathbf{a}$	$\mathbf{b} + \mathbf{ab}$
$y_3 = \mathbf{b}$	$\mathbf{b}$
$y_4 = \mathbf{a} - \mathbf{b}$	$\mathbf{a} + \mathbf{ab}$
$y_5 = \mathbf{a}$	$\mathbf{a}$
$y_6 = \mathbf{a} + \mathbf{b}$	$\mathbf{a} + \mathbf{b}$
$y_7 = \mathbf{a} \vee \mathbf{b}$	$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{ab}$
$y_8 = \mathbf{a} \downarrow \mathbf{b}$	$\mathbf{1} + \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{ab}$
$y_9 = \mathbf{a} \sim \mathbf{b}$	$\mathbf{1} + \mathbf{a} + \mathbf{b}$
$y_{10} = \overline{\mathbf{a}}$	$\mathbf{1} + \mathbf{a}$
$y_{11} = \mathbf{a} \to \mathbf{b}$	$\mathbf{1} + \mathbf{a} + \mathbf{ab}$
$y_{12} = \overline{\mathbf{b}}$	$\mathbf{1} + \mathbf{b}$
$y_{13} = \mathbf{b} \to \mathbf{a}$	$\mathbf{1} + \mathbf{b} + \mathbf{ab}$
$y_{14} = \mathbf{a} \mid \mathbf{b}$	$\mathbf{1} + \mathbf{ab}$
$y_{15} = \mathbf{1}$	$\mathbf{1}$

7. Основные законы булевой логики

Пусть **a**,**b**,**c** – конституенты.

Основными законами логики Буля являются:

1) *законы идемпотентности*:

$$1.1)\quad \mathbf{a} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{a},$$

$$1.2)\quad \mathbf{a} = \mathbf{a} \vee \mathbf{a};$$

2) *законы коммутативности*:

$$2.1)\quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{a},$$

$$2.2)\quad \mathbf{a} \vee \mathbf{b} = \mathbf{b} \vee \mathbf{a};$$

3) *законы ассоциативности*:

$$3.1)\quad \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c},$$

$$3.2)\quad \mathbf{a} \vee (\mathbf{b} \vee \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \vee \mathbf{c};$$

4) *законы дистрибутивности*:

$$4.1)\quad \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \vee \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \vee (\mathbf{a} \vee \mathbf{c}),$$

$$4.2)\quad \mathbf{a} \vee (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{c});$$

5) *законы нуля и единицы*:

$$5.1)\quad \mathbf{a} \wedge \overline{\mathbf{a}} = \mathbf{0},$$
$$5.2)\quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{1} = \mathbf{a},$$
$$5.3)\quad \mathbf{a} \vee \overline{\mathbf{a}} = \mathbf{1},$$
$$5.4)\quad \mathbf{a} \vee \mathbf{0} = \mathbf{a};$$

6) *законы поглощения*:

$$6.1)\quad \mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) = \mathbf{a},$$
$$6.2)\quad \mathbf{a} \vee (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{a};$$

7) *законы де Моргана*:

$$7.1)\quad \overline{\mathbf{a}} \wedge \overline{\mathbf{b}} = \overline{\mathbf{a} \vee \mathbf{b}},$$

$$7.2)\quad \overline{\mathbf{a} \vee \mathbf{b}} = \overline{\mathbf{a}} \wedge \overline{\mathbf{b}};$$

8) *законы склеивания*:

$$8.1)\quad (\mathbf{a} \vee \overline{\mathbf{b}}) \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) = \mathbf{a},$$

$$8.2)\quad (\mathbf{a} \wedge \overline{\mathbf{b}}) \vee (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{a}.$$

Отметим, что законы идемпотентности (1.1), коммутативности (2.1), ассоциативности (3.1), дистрибутивности (4.1), нуля и единицы (5.1), (5.2), поглощения (6.1), де Моргана (7.1) и склеивания (8.1) записаны для конъюнкции.

Используя принцип двойственности, из перечисленных законов несложно получить законы логики Буля для дизъюнкции (1.2), (2.2), (3.2), (4.2), (5.3), (5.4), (6.2), (7.2), ((8.2).

Отметим, что законы булевой логики (1.1) – (8.2) можно переписать справа налево.

1) *законы идемпотентности*:

$$1.3)\quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{a},$$

$$1.4)\quad \mathbf{a} \vee \mathbf{a} = \mathbf{a};$$

2) *законы коммутативности*:

$$2.3)\quad \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b},$$

$$2.4)\quad \mathbf{b} \vee \mathbf{a} = \mathbf{a} \vee \mathbf{b};$$

3) *законы ассоциативности*:

$$3.3)\quad (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}),$$

$$3.4)\quad (\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \vee \mathbf{c} = \mathbf{a} \vee (\mathbf{b} \vee \mathbf{c});$$

4) *законы дистрибутивности*:

$$4.3)\quad (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \vee (\mathbf{a} \vee \mathbf{c}) = \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \vee \mathbf{c}),$$

$$4.4)\quad (\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{c}) = \mathbf{a} \vee (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c});$$

5) *законы нуля и единицы*:

$$5.5)\quad \mathbf{0} = \mathbf{a} \wedge \overline{\mathbf{a}},$$

$$5.6)\quad \mathbf{a} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{1},$$

$$5.7)\quad \mathbf{1} = \mathbf{a} \vee \overline{\mathbf{a}},$$

$$5.8)\quad \mathbf{a} = \mathbf{a} \vee \mathbf{0};$$

6) *законы поглощения*:

$$6.3)\quad \mathbf{a} = \mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{b}),$$

$$6.4)\quad \mathbf{a} = \mathbf{a} \vee (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b});$$

7) *законы де Моргана*:

$$7.3)\quad \overline{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}} = \overline{\mathbf{a}} \vee \overline{\mathbf{b}},$$

$$7.4)\quad \overline{\mathbf{a} \vee \mathbf{b}} = \overline{\mathbf{a}} \wedge \overline{\mathbf{b}};$$

8) *законы склеивания*:

$$8.3)\quad \mathbf{a} = (\mathbf{a} \vee \overline{\mathbf{b}}) \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{b}),$$

$$8.4)\quad \mathbf{a} = (\mathbf{a} \wedge \overline{\mathbf{b}}) \vee (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}),$$

8. Методы доказательства в логике Буля

В булевой логике используются два подхода – *аксиоматический* и *конструктивный*.

При аксиоматическом доказательстве используется жесткая *система аксиом*, например, система из восьми названных законов булевой логики.

Конструктивное доказательство проводится с помощью таблиц истинности.

Отметим, что не все восемь законов независимы друг от друга.

Законы идемпотентности, поглощения, де Моргана и склеивания можно получить из законов коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности и нуля и единицы.

8.1. Доказательство закона поглощения

Закон поглощения можно получить из законов нуля и единицы, дистрибутивности и коммутативности.

Докажем его для дизъюнкции.

Левую часть выражения (6.1),

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) = \mathbf{a},$$

используя закон нуля и единицы (5.2) $\mathbf{a} \wedge \mathbf{1} = \mathbf{a}$, перепишем в следующем виде

$$\mathbf{a} \vee (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{1}) \vee (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}).$$

Используя закон дистрибутивности $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \vee (\mathbf{a} \vee \mathbf{c}) = \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \vee \mathbf{c})$ справа налево (4.3), для правой части равенства получим

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{1}) \vee (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{a} \wedge (\mathbf{1} \vee \mathbf{b}).$$

Но $\mathbf{1} \vee \mathbf{b}$, есть тавтология, поэтому

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{1} \vee \mathbf{b}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{1}.$$

И в соответствии с законом нуля и единицы (5.2) получаем $\mathbf{a} \wedge \mathbf{1} = \mathbf{a}$.

Таким образом, закон поглощения для дизъюнкции (6.1) доказан.

Цепочка логических равенств в этом случае выглядит следующим образом:

$$\mathbf{a} \vee (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{1}) \vee (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{a} \wedge (\mathbf{1} \vee \mathbf{b}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{1} = \mathbf{a}.$$

8.2. Доказательство закона идемпотентности

Закон идемпотентности относительно дизъюнкции можно вывести из законов нуля и единицы:

Возьмем выражение $\mathbf{a} \vee \mathbf{a}$. Из закона нуля и единицы (5.6) $\mathbf{a} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{1}$, следует, что

$$\mathbf{a} \vee \mathbf{a} = (\mathbf{a} \vee \mathbf{a}) \wedge \mathbf{1}.$$

Вместо единицы в правой части подставим (5.7) $\mathbf{1} = \mathbf{a} \vee \overline{\mathbf{a}}$. Получим

$$(\mathbf{a} \vee \mathbf{a}) \wedge \mathbf{1} = (\mathbf{a} \vee \mathbf{a}) \wedge (\mathbf{a} \vee \overline{\mathbf{a}}).$$

Используя закон дистрибутивности $(\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{c}) = \mathbf{a} \vee (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$ справа налево (4.4), получим

$$(\mathbf{a} \vee \mathbf{a}) \wedge (\mathbf{a} \vee \overline{\mathbf{a}}) = \mathbf{a} \vee (\mathbf{a} \wedge \overline{\mathbf{a}}).$$

Согласно закону нуля и единицы (5.1) $\mathbf{a} \wedge \overline{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$, поэтому

$$\mathbf{a} \vee (\mathbf{a} \wedge \overline{\mathbf{a}}) = \mathbf{a} \vee \mathbf{0}.$$

Откуда, используя закон нуля и единицы (5.4) $\mathbf{a} \vee \mathbf{0} = \mathbf{a}$, получим

$$\mathbf{a} \vee \mathbf{0} = \mathbf{a}.$$

Цепочка логических равенств в этом случае выглядит следующим образом:

$$\mathbf{a} \vee \mathbf{a} = (\mathbf{a} \vee \mathbf{a}) \wedge \mathbf{1} = (\mathbf{a} \vee \mathbf{a}) \wedge (\mathbf{a} \vee \overline{\mathbf{a}}) = \mathbf{a} \vee (\mathbf{a} \wedge \overline{\mathbf{a}}) = \mathbf{a} \vee \mathbf{0} = \mathbf{a}.$$

8.3. Второе доказательство закона идемпотентности

Отметим, что закон идемпотентности можно также получить из законов поглощения и дистрибутивности.

Запишем закон поглощения для дизъюнкции справа налево (6.4)

$$\mathbf{a} = \mathbf{a} \vee (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}).$$

Используя закон дистрибутивности (4.2) $\mathbf{a} \vee (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{c})$, и коммутативности выражение $\mathbf{a} \vee (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$ запишем в следующем виде:

$$\mathbf{a} \vee (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \vee \mathbf{a}) \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{a}).$$

Используя закон дистрибутивности (4.4) $(\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{c}) = \mathbf{a} \vee (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$, выражение, стоящее в правой части, запишем в виде

$$(\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{a}) = (\mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{b})) \vee (\mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{b})).$$

Используя закон поглощения (6.2) $\mathbf{a} \vee (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{a}$, получаем для правой части

$$(\mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{b})) \vee (\mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{b})) = \mathbf{a} \vee \mathbf{a}.$$

Тем самым доказываем закон идемпотентности.

Цепочка логических равенств в этом случае выглядит следующим образом:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a} \vee (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \vee \mathbf{a}) \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{a}) =$$

$$= ((\mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{b})) \vee (\mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{b})) = \mathbf{a} \vee \mathbf{a}.$$

8.4. Доказательство закона де Моргана

Закон де Моргана можно доказать следующим образом.

"Умножив" выражение (7.3)

$$\overline{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}} = \overline{\mathbf{a}} \vee \overline{\mathbf{b}},$$

слева и справа на скобку $(\mathbf{a} \vee \mathbf{b})$, получим:

$$\overline{\mathbf{a} \vee \mathbf{b}} \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) = \overline{\mathbf{a}} \wedge \overline{\mathbf{b}} \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{b}),$$

Согласно закону нуля и единицы (5.1) $\overline{\mathbf{d}} \wedge \mathbf{d} = \mathbf{0}$, где $\mathbf{d} = \mathbf{a} \vee \mathbf{b}$, поэтому левая часть выражения равна нулю

$$\overline{\mathbf{a} \vee \mathbf{b}} \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) = \mathbf{0}.$$

Используя закон ассоциативности (3.1) $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c}$, для правой части выражения, получим

$$\overline{\mathbf{a}} \wedge \overline{\mathbf{b}} \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) = \mathbf{f} \wedge \mathbf{b},$$

где $\mathbf{f} = (\overline{\mathbf{a}} \wedge \overline{\mathbf{b}}) \wedge \mathbf{a}$. Используя законы коммутативности и ассоциативности (3.3) $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$, выражение для $\mathbf{f}$ можно записать следующим образом:

$$\mathbf{f} = (\overline{\mathbf{a}} \wedge \overline{\mathbf{b}}) \wedge \mathbf{a} = (\overline{\mathbf{b}} \wedge \overline{\mathbf{a}}) \wedge \mathbf{a} = \overline{\mathbf{b}} \wedge (\overline{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{a}),$$

Но $\overline{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{0}$, а $\overline{\mathbf{b}} \wedge \mathbf{0} = \overline{\mathbf{b}}$ и получаем, что $\mathbf{f} = \overline{\mathbf{b}}$. Но $\overline{\mathbf{b}} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Таким образом, и правая часть выражения равна нулю.

8.5. Доказательство закона склеивания

Закон склеивания можно получить из законов дистрибутивности и нуля и единицы.

Докажем его для конъюнкции (8.1).

$$(\mathbf{a} \vee \overline{\mathbf{b}}) \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) = \mathbf{a},$$

Используя закон дистрибутивности $(\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{c}) = \mathbf{a} \vee (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ справа налево (4.4), перепишем левую часть выражения (8.1)

$$(\mathbf{a} \vee \overline{\mathbf{b}}) \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) = \mathbf{a} \vee (\overline{\mathbf{b}} \wedge \mathbf{b}).$$

Используя закон нуля и единицы (5.3) $\overline{\mathbf{b}} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{0}$, получим

$$\mathbf{a} \vee (\overline{\mathbf{b}} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{a} \vee \mathbf{0}.$$

Но $\mathbf{a} \vee \mathbf{0} = \mathbf{a}$. Таким образом, закон склеивания для конъюнкции доказан.

Цепочка логических равенств в этом случае выглядит следующим образом:

$$(\mathbf{a} \vee \overline{\mathbf{b}}) \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) = \mathbf{a} \vee (\overline{\mathbf{b}} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{a} \vee \mathbf{1} = \mathbf{a}.$$

Итак, в качестве независимой системы законов можно выбрать законы:*коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности, нуля и единицы.*

9. Нахождение булевой функции от трех переменных по ее таблице истинности

Пусть задана конкретная таблица истинности (таблица 13) для функции, зависящей от трех переменных.

Таблица 13. Таблица истинности некоторой функции, зависящей от трех переменных

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{y = f(x_1, x_2, x_3)}$
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	0
1	1	0	1
0	0	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	1

Тогда, выписывая соответствующие конъюнкты против единичных значений y, можно получить СДНФ.

$$y_{\text{СДНФ}} = (\overline{\mathbf{x_3}} \wedge \overline{\mathbf{x_2}} \wedge \mathbf{x_1}) \vee (\overline{\mathbf{x_3}} \wedge \mathbf{x_2} \wedge \mathbf{x_1}) \vee (\mathbf{x_3} \wedge \overline{\mathbf{x_2}} \wedge \overline{\mathbf{x_1}}) \vee (\mathbf{x_3} \wedge \mathbf{x_2} \wedge \mathbf{x_1}).$$

Если же выписать дизъюнкты против нулевых значений y, то можно получить СКНФ.

$$y_{\text{СКНФ}} = (\mathbf{x_3} \vee \mathbf{x_2} \vee \mathbf{x_1}) \wedge (\mathbf{x}_{\vee}\overline{\mathbf{x_2}} \vee \mathbf{x_1}) \wedge (\overline{\mathbf{x_3}} \vee \ \mathbf{x_2} \vee \overline{\mathbf{x_1}}) \wedge (\overline{\mathbf{x_3}} \vee \overline{\mathbf{x_2}} \vee \mathbf{x_1}).$$

Наконец, СПНФ образуется путем замены в СДНФ: $\vee$ на $+$ и $\overline{x}$ на $1 + x$.

$$y_{\text{СПНФ}} = (\mathbf{x_3} + \mathbf{1})(\mathbf{x_2} + \mathbf{1})\mathbf{x_1} + \mathbf{x_3 x_2 x_1} + (\mathbf{x_3} + \mathbf{1})\mathbf{x_2 x_1} + \mathbf{x_3}(\mathbf{x_2} + \mathbf{1})(\mathbf{x_1} + \mathbf{1}).$$

В последним случае выражение для $y_{\text{СПНФ}}$ легко можно упростить, если раскрыть скобки и взимно сократить все одинаковые слагаемые, входящие в формулу четное число раз:

$$y_{\text{СПНФ}} = \mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} + \mathbf{x_3 x_2}.$$

Подобное упрощение, которое называется *минимизацией логической функции* можно осуществить и по отношению к СДНФ и СКНФ, используя законы булевой логики.

9.1. Минимизация логической функции, записанной в СДНФ и СКНФ

Проведем минимизацию логической функции, записанной в СДНФ.

$$y_{\text{СДНФ}} = (\overline{\mathbf{x_3}} \wedge \overline{\mathbf{x_2}} \wedge \mathbf{x_1}) \vee (\overline{\mathbf{x_3}} \wedge \mathbf{x_2} \wedge \mathbf{x_1}) \vee (\mathbf{x_3} \wedge \overline{\mathbf{x_2}} \wedge \overline{\mathbf{x_1}}) \vee (\mathbf{x_3} \wedge \mathbf{x_2} \wedge \mathbf{x_1}),$$

Конституенту

$$(\overline{\mathbf{x_3}} \wedge \overline{\mathbf{x_2}} \wedge \mathbf{x_1}) \vee (\overline{\mathbf{x_3}} \wedge \mathbf{x_2} \wedge \mathbf{x_1})$$

перепишем в следующем виде:

$$(\mathbf{a} \wedge \overline{\mathbf{x_2}}) \vee (\mathbf{a} \wedge \mathbf{x_2}),$$

где $\mathbf{a} = \overline{\mathbf{x_3}} \wedge \mathbf{x_1}$. Тогда, согласно закону склеивания (8.1)

$$(\mathbf{a} \wedge \overline{\mathbf{x_2}}) \vee (\mathbf{a} \wedge \mathbf{x_2}) = \mathbf{a} = \overline{\mathbf{x_3}} \wedge \mathbf{x_1},$$

и для логической функции, записанной в СДНФ, получаем логическую функцию в МДНФ (*минимальную дизъюнктивную нормальную форму)*

$$y_{\text{МДНФ}} = (\overline{\mathbf{x_3}} \wedge \mathbf{x_1}) \vee (\mathbf{x_3} \wedge \overline{\mathbf{x_2}} \wedge \overline{\mathbf{x_1}}) \vee (\mathbf{x_3} \wedge \mathbf{x_2} \wedge \mathbf{x_1}),$$

Проведем минимизацию логической функции, записанной в СКНФ.

$$y_{\text{СКНФ}} = (\mathbf{x_3} \vee \mathbf{x_2} \vee \mathbf{x_1}) \wedge (\mathbf{x}_{\vee}\overline{\mathbf{x_2}} \vee \mathbf{x_1}) \wedge (\overline{\mathbf{x_3}} \vee \ \mathbf{x_2} \vee \overline{\mathbf{x_1}}) \wedge (\overline{\mathbf{x_3}} \vee \overline{\mathbf{x_2}} \vee \mathbf{x_1}),$$

Конституенту

$$(\mathbf{x_3} \vee \mathbf{x_2} \vee \mathbf{x_1}) \wedge (\mathbf{x_3} \vee \overline{\mathbf{x_2}} \vee \mathbf{x_1})$$

перепишем в следующем виде:

$$(\mathbf{a} \vee \overline{\mathbf{x_2}}) \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{x_2}),$$

где $\mathbf{a} = \mathbf{x_3} \vee \mathbf{x_1}$. Тогда, согласно закону склеивания (8.1)

$$(\mathbf{a} \vee \overline{\mathbf{x_2}}) \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{x_2}) = \mathbf{a} = \mathbf{x_3} \vee \mathbf{x_1},$$

и для логической функции, записанной в СКНФ, получаем логическую функцию в МКНФ (*минимальную конъюнктивную нормальную форму)*

$$y_{\text{МКНФ}} = (\mathbf{x_3} \vee \mathbf{x_1}) \wedge (\mathbf{x_3} \vee \overline{\mathbf{x_2}} \vee \overline{\mathbf{x_1}}) \wedge (\mathbf{x_3} \vee \mathbf{x_2} \vee \mathbf{x_1}),$$

10. Примеры для решения

Используя законы булевой логики, упростите представленные конституенты.

$$1.(\mathbf{a} \vee (\overline{\mathbf{d}} \vee \mathbf{b})) \vee ((\overline{\mathbf{a}} \vee (\overline{\mathbf{b}} \vee \mathbf{d})) \vee \mathbf{c})) \vee \overline{\mathbf{c}} \vee (\mathbf{a} \vee (\mathbf{b} \vee \overline{\mathbf{d}})),$$

$$2.((\mathbf{a} \vee \mathbf{c}) \vee (\mathbf{a} \vee \mathbf{d})) \vee (((\mathbf{c} \vee (\mathbf{c} \vee \mathbf{b})) \vee \overline{\mathbf{c}}) \vee \overline{\mathbf{a}}),$$

$$3.(\overline{\mathbf{b}} \vee \mathbf{d})((\overline{\mathbf{d}} \vee \mathbf{c}) \vee (\mathbf{a} \vee \mathbf{c}) \vee (\overline{\mathbf{d}} \vee \overline{\mathbf{c}}) \vee (\mathbf{a} \vee \overline{\mathbf{c}})) \vee (\mathbf{b} \vee \mathbf{d}),$$

$$4.(\mathbf{a} \vee \mathbf{c}\overline{\mathbf{c}}) \vee (\overline{\mathbf{a}} \vee \overline{\mathbf{b}}) \vee (\overline{\mathbf{b}} \vee \mathbf{c}) \vee (\overline{\mathbf{a}} \vee \mathbf{b}) \vee (\mathbf{b} \vee \mathbf{c}),$$

$$5.(\vee \mathbf{c}) \vee ((\mathbf{b} \vee \overline{\mathbf{d}}) \vee) \vee \overline{\mathbf{a}} \vee \overline{\mathbf{d}}) \vee (\mathbf{d} \vee \mathbf{b}) \vee (\overline{\mathbf{a}} \vee \mathbf{d})) \vee (\mathbf{a} \vee \overline{\mathbf{c}}),$$

$$6.((\overline{\mathbf{b}} \vee \overline{\mathbf{c}}) \vee (\mathbf{a} \vee \mathbf{b})) \vee (\mathbf{d} \vee \overline{\mathbf{c}}) \vee (((\overline{\mathbf{b}} \vee \overline{\mathbf{a}}) \vee \mathbf{c}) \vee (\mathbf{a} \vee \mathbf{b})),$$

$$7.(\mathbf{a} \vee \overline{\mathbf{c}}) \vee (\overline{\mathbf{a}} \vee \overline{\mathbf{b}}) \vee (\mathbf{b} \vee \mathbf{c}) \vee (\overline{\mathbf{a}} \vee \mathbf{b}) \vee (\mathbf{c} \vee \overline{\mathbf{b}}),$$

$$8.((\mathbf{a} \vee (\mathbf{c} \vee (\mathbf{b} \vee \mathbf{c}))) \vee \overline{(\mathbf{c} \vee \mathbf{d})} \vee (\mathbf{c} \vee \overline{\mathbf{d}})) \vee (\mathbf{c} \vee (\overline{\mathbf{d}} \vee \overline{\mathbf{c}}) \vee \mathbf{d}),$$

$$9.((\mathbf{a} \vee \overline{\mathbf{a}}) \vee (\overline{\mathbf{b}} \vee \overline{\mathbf{d}} \vee (\overline{\mathbf{b}} \vee \overline{\mathbf{c}}) \vee (\overline{\mathbf{c}} \vee \mathbf{d})) \vee ((\overline{\mathbf{b}} \vee \mathbf{c}) \vee (\mathbf{c} \vee \mathbf{d})),$$

$$10.(\mathbf{a} \vee \overline{\mathbf{c}}) \vee ((\overline{\mathbf{a}} \vee \mathbf{d}) \vee \mathbf{b} \vee \mathbf{d}) \vee (\overline{\mathbf{a}} \vee \overline{\mathbf{d}}) \vee (\mathbf{b} \vee \overline{\mathbf{d}})) \vee (\mathbf{a} \vee \mathbf{c}),$$

$$11.((\mathbf{d} \vee \overline{\mathbf{c}}) \vee (\overline{\mathbf{d}} \vee \overline{\mathbf{b}}) \vee (\mathbf{c} \vee \overline{\mathbf{b}})) \vee ((\overline{\mathbf{d}} \vee \mathbf{b}) \vee (\mathbf{c} \vee \mathbf{b})) \vee (\overline{\mathbf{a}} \vee \mathbf{a}),$$

$$12.((\overline{\mathbf{c}} \vee \overline{\mathbf{d}}) \vee (\mathbf{b} \vee \mathbf{c})) \vee (\overline{\mathbf{a}} \vee \overline{\mathbf{d}}) \vee (((\overline{\mathbf{c}} \vee \overline{\mathbf{b}}) \vee \mathbf{d}) \vee (\mathbf{c} \vee \mathbf{b})),$$

$$13.((\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \vee (\overline{\mathbf{b}} \vee \mathbf{c} \vee \mathbf{d}) \vee (\overline{\mathbf{a}} \vee \overline{\mathbf{b}} \vee \mathbf{c} \vee \mathbf{d}) \vee \overline{\mathbf{b}} \vee \overline{\mathbf{c}} \vee \mathbf{d}),$$

$$14.((\mathbf{a} \vee \mathbf{c}) \vee (\mathbf{a} \vee \mathbf{d})) \vee (((\mathbf{c} \vee (\mathbf{c} \vee \mathbf{b})) \vee \overline{\mathbf{c}}) \vee \overline{\mathbf{a}}),$$

$$15.((\mathbf{a} \vee \mathbf{c}) \vee (\mathbf{a} \vee \mathbf{d})) \vee (((\mathbf{c} \vee (\mathbf{c} \vee \mathbf{b})) \vee \overline{\mathbf{c}}) \vee \overline{\mathbf{a}}),$$

$$16.((\mathbf{a} \vee \mathbf{c}) \vee (\mathbf{a} \vee \mathbf{d})) \vee (((\mathbf{c} \vee (\mathbf{c} \vee \mathbf{b})) \vee \overline{\mathbf{c}}) \vee \overline{\mathbf{a}}),$$

$$17.((\mathbf{a} \vee \mathbf{c}) \vee (\mathbf{a} \vee \mathbf{d})) \vee (((\mathbf{c} \vee (\mathbf{c} \vee \mathbf{b})) \vee \overline{\mathbf{c}}) \vee \overline{\mathbf{a}}),$$

$$18.((\mathbf{a} \vee \mathbf{c}) \vee (\mathbf{a} \vee \mathbf{d})) \vee (((\mathbf{c} \vee (\mathbf{c} \vee \mathbf{b})) \vee \overline{\mathbf{c}}) \vee \overline{\mathbf{a}}),$$

$$19.((\mathbf{a} \vee \mathbf{c}) \vee (\mathbf{a} \vee \mathbf{d})) \vee (((\mathbf{c} \vee (\mathbf{c} \vee \mathbf{b})) \vee \overline{\mathbf{c}}) \vee \overline{\mathbf{a}}),$$

$$20.((\mathbf{a} \vee \mathbf{c}) \vee (\mathbf{a} \vee \mathbf{d})) \vee (((\mathbf{c} \vee (\mathbf{c} \vee \mathbf{b})) \vee \overline{\mathbf{c}}) \vee \overline{\mathbf{a}}),$$

$$21.((\mathbf{a} \vee \mathbf{c}) \vee (\mathbf{a} \vee \mathbf{d})) \vee (((\mathbf{c} \vee (\mathbf{c} \vee \mathbf{b})) \vee \overline{\mathbf{c}}) \vee \overline{\mathbf{a}}),$$

$$22.((\mathbf{a} \vee \mathbf{c}) \vee (\mathbf{a} \vee \mathbf{d})) \vee (((\mathbf{c} \vee (\mathbf{c} \vee \mathbf{b})) \vee \overline{\mathbf{c}}) \vee \overline{\mathbf{a}}),$$

$$23.((\mathbf{a} \vee \mathbf{c}) \vee (\mathbf{a} \vee \mathbf{d})) \vee (((\mathbf{c} \vee (\mathbf{c} \vee \mathbf{b})) \vee \overline{\mathbf{c}}) \vee \overline{\mathbf{a}}),$$

$$24.((\mathbf{a} \vee \mathbf{c}) \vee (\mathbf{a} \vee \mathbf{d})) \vee (((\mathbf{c} \vee (\mathbf{c} \vee \mathbf{b})) \vee \overline{\mathbf{c}}) \vee \overline{\mathbf{a}}).$$

11. Используемая литература

1. И.В, Романовский. Дискретный анализ, Невский диалект, 2001,

2. Ф. А. Новиков. Дискретная математика для програмистов. Спб, 2001.

3. Б. Н. Иванов. Дискретная математика. Алгоритмы и программы. М., 2001.

4. В. Н. Нефедов, В. А. Осипова. Курс дискретной математики, М., 1992.

5. С. В. Яблонский. Введение в дискретную математику ,М., 2001.

6. И. А. Лавров, Л. Л. Максимова. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов, М., 1995.

7. О. Е. Акимов. Дискретная математика: логика, группы, графы, М., 2001.