



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Ю. Осипенко, О некоторых неравенствах типа Карлсона, *Матем. сб.*, 2025, том 216, номер 3, 177–190

DOI: 10.4213/sm10198

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 84.246.85.227

1 марта 2025 г., 12:56:57



К. Ю. Осипенко

О некоторых неравенствах типа Карлсона

В статье находится точная константа в неравенстве

$$\|w(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T)} \leq K \|w_0(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T)}^\gamma \left(\sum_{j=1}^d \|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T)}^r \right)^{(1-\gamma)/r},$$

где T – конус в \mathbb{R}^d , а веса $w(\cdot)$, $w_0(\cdot)$ и $\varphi_j(\cdot)$, $j = 1, \dots, d$, – измеримые однородные функции. Аналогичные точные неравенства получены для дифференциальных операторов.

Библиография: 7 названий.

Ключевые слова: точные неравенства, дифференциальные операторы, неравенствах типа Карлсона.

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm10198>

Введение

Хорошо известное неравенство Карлсона [1]

$$\|x(t)\|_{L_1(\mathbb{R}_+)} \leq \sqrt{\pi} \|x(t)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^{1/2} \|tx(t)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^{1/2}, \quad \mathbb{R}_+ = [0, +\infty),$$

обобщалось многими авторами (см., например, [2]–[7]). Сформулируем одно из обобщений этого неравенства, которым мы будем пользоваться.

Рассмотрим в \mathbb{R}^d сферическую систему координат

$$\begin{aligned} t_1 &= \rho \cos \omega_1, \\ t_2 &= \rho \sin \omega_1 \cos \omega_2, \\ &\dots\dots\dots \\ t_{d-1} &= \rho \sin \omega_1 \sin \omega_2 \cdots \sin \omega_{d-2} \cos \omega_{d-1}, \\ t_d &= \rho \sin \omega_1 \sin \omega_2 \cdots \sin \omega_{d-2} \sin \omega_{d-1}. \end{aligned}$$

Для функции $f(t)$, $t \in \mathbb{R}^d$, положим

$$\tilde{f}(\omega) = |f(\cos \omega_1, \dots, \sin \omega_1 \sin \omega_2 \cdots \sin \omega_{d-2} \sin \omega_{d-1})|, \quad \omega = (\omega_1, \dots, \omega_{d-1}).$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} P &= \{(p, q, r) : 1 \leq q < p, r\}, & P_1 &= \{(p, q, r) : 1 \leq q = r < p\}, \\ P_2 &= \{(p, q, r) : 1 \leq q = p < r\}. \end{aligned}$$

Пусть $|w(\cdot)|$, $|w_0(\cdot)|$, $|w_1(\cdot)|$ – измеримые однородные функции на \mathbb{R}^d порядков θ , θ_0 , θ_1 соответственно, T – конус в \mathbb{R}^d , а Ω – область изменения ω , когда $t \in T$. Из того, что T – конус, следует, что Ω не зависит от ρ . Положим

$$J(\omega) = \sin^{d-2} \omega_1 \sin^{d-3} \omega_2 \cdots \sin \omega_{d-2}.$$

Из работы [7] (следствие 4 при $n = 1$) вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $w(\cdot)$, $w_0(\cdot)$, $w_1(\cdot) \neq 0$ для почти всех $t \in T$, $(p, q, r) \in P \cup P_1 \cup P_2$ и $\gamma \in (0, 1)$. Предположим, что

$$I = \int_{\Omega} \left(\frac{\tilde{w}(\omega)}{\tilde{w}_0^\gamma(\omega) \tilde{w}_1^{(1-\gamma)}(\omega)} \right)^{\tilde{q}} J(\omega) d\omega < \infty,$$

где

$$\gamma = \frac{\theta_1 - \theta - d(1/q - 1/r)}{\theta_1 - \theta_0 + d(1/r - 1/p)}, \quad \frac{1}{\tilde{q}} = \frac{1}{q} - \frac{\gamma}{p} - \frac{1-\gamma}{r}.$$

Тогда для всех $x(\cdot)$ таких, что $w_0(\cdot)x(\cdot) \in L_p(T)$ и $w_1(\cdot)x(\cdot) \in L_r(T)$, имеет место точное неравенство

$$\|w(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T)} \leq K \|w_0(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T)}^\gamma \|w_1(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T)}^{1-\gamma},$$

где

$$K = \gamma^{-\gamma/p} (1-\gamma)^{-(1-\gamma)/r} \left(\frac{B(\tilde{q}\gamma/p, \tilde{q}(1-\gamma)/r) I}{|\theta_1 - \theta_0 + d(1/r - 1/p)|(\gamma r + (1-\gamma)p)} \right)^{1/\tilde{q}},$$

а $B(\cdot, \cdot)$ – B -функция Эйлера.

Для $(p, q, r) \in P$ теорема 1 была доказана в работе [4] (см. также следствие 4 из работы [5]).

В силу свойств B -функций

$$B\left(\frac{\tilde{q}\gamma}{p}, \frac{\tilde{q}(1-\gamma)}{r}\right) = \frac{\gamma r + (1-\gamma)p}{\gamma r} B\left(\frac{\tilde{q}\gamma}{p} + 1, \frac{\tilde{q}(1-\gamma)}{r}\right).$$

Поэтому константа K может быть записана в виде

$$K = \gamma^{-\gamma/p} (1-\gamma)^{-(1-\gamma)/r} \left(\frac{B(\tilde{q}\gamma/p + 1, \tilde{q}(1-\gamma)/r) I}{r|\theta_1 - \theta - d(1/q - 1/r)|} \right)^{1/\tilde{q}}.$$

§ 1. Точные неравенства на конусах в \mathbb{R}^d

Пусть

$$w_1(t) = \left(\sum_{j=1}^n |\varphi_j(t)|^r \right)^{1/r}.$$

Тогда

$$\|w_1(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T)}^r = \sum_{j=1}^n \|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T)}^r.$$

Тем самым теорема 1 может быть переформулирована в следующем виде.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $|w(\cdot)|, |w_0(\cdot)|$ – измеримые однородные функции порядков θ, θ_0 , а $|\varphi_j(\cdot)|, j = 1, \dots, n$, – измеримые однородные функции порядка θ_1 . Пусть, кроме того, $w(t), w_0(t) \neq 0$ и $\sum_{j=1}^n |\varphi_j(t)| \neq 0$ для почти всех $t \in T$, $(p, q, r) \in P \cup P_1 \cup P_2$ и $\gamma \in (0, 1)$. Предположим, что

$$I = \int_{\Omega} \left(\frac{\tilde{w}(\omega)}{\tilde{w}_0^\gamma(\omega) (\sum_{j=1}^n \tilde{\varphi}_j^r(\omega))^{(1-\gamma)/r}} \right)^{\tilde{q}} J(\omega) d\omega < \infty.$$

Тогда для всех $x(\cdot)$ таких, что $w_0(\cdot)x(\cdot) \in L_p(T)$ и $\varphi_j(\cdot)x(\cdot) \in L_r(T), j = 1, \dots, n$, имеет место точное неравенство

$$\|w(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T)} \leq K \|w_0(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T)}^\gamma \left(\sum_{j=1}^n \|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T)}^r \right)^{(1-\gamma)/r}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $|w(\cdot)|, |w_0(\cdot)|$ – измеримые однородные функции порядков $d(1 - 1/q), d - (\lambda + d)/p$, а $|\varphi_j(\cdot)|, j = 1, \dots, n$, – измеримые однородные функции порядка $d + (\mu - d)/r, \lambda, \mu > 0$. Пусть, кроме того, $w(t), w_1(t) \neq 0$ и $\sum_{j=1}^n |\varphi_j(t)| \neq 0$ для почти всех $t \in T$ и $(p, q, r) \in P \cup P_1 \cup P_2$. Предположим, что

$$I = \int_{\Omega} \left(\frac{\tilde{w}(\omega)}{\tilde{w}_0^{p\alpha}(\omega) (\sum_{j=1}^n \tilde{\varphi}_j^r(\omega))^\beta} \right)^{1/(1/q - \alpha - \beta)} J(\omega) d\omega < \infty,$$

где

$$\alpha = \frac{\mu}{p\mu + r\lambda}, \quad \beta = \frac{\lambda}{p\mu + r\lambda}.$$

Тогда для всех $x(\cdot)$ таких, что $w_0(\cdot)x(\cdot) \in L_p(T)$ и $\varphi_j(\cdot)x(\cdot) \in L_r(T), j = 1, \dots, n$, имеет место точное неравенство

$$\|w(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T)} \leq \hat{K} \|w_0(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T)}^{p\alpha} \left(\sum_{j=1}^n \|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T)}^r \right)^\beta,$$

где

$$\hat{K} = \frac{1}{(p\alpha)^\alpha (r\beta)^\beta} \left(\frac{I}{\lambda + \mu} B \left(\frac{\alpha}{1/q - \alpha - \beta}, \frac{\beta}{1/q - \alpha - \beta} \right) \right)^{1/q - \alpha - \beta}.$$

В случае, когда $T = \mathbb{R}_+^d, q = 1, p, r > 1, w(t) \equiv 1, n = 1$,

$$w_0(t) = W^{1 - (\lambda + 1)/p}(t), \quad w_1(t) = W^{1 + (\mu - 1)/r}(t),$$

где $W(\cdot)$ – однородная функция порядка d , утверждение следствия 1 было получено в работе [3]. В одномерном случае ($d = 1$) при сформулированных выше условиях соответствующее утверждение было получено в работе [2].

§ 2. Точные неравенства для дифференциальных операторов

2.1. Точные неравенства в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$. Пусть S – пространство Шварца быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций на \mathbb{R} ,

S' – соответствующее пространство обобщенных функций, $F: S' \rightarrow S'$ – преобразование Фурье.

Пусть $|\varphi_j(\cdot)|$, $j = 1, \dots, n$, – однородные функции порядка ν , а $|\psi(\cdot)|$ – однородная функция порядка η . Положим

$$X_p = \{x(\cdot) \in S': \varphi_j(\cdot)Fx(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d), j = 1, \dots, n, Fx(\cdot) \in L_p(\mathbb{R}^d)\}.$$

Для функций $x(\cdot) \in X_p$ определим операторы D_j , $j = 1, \dots, n$, равенствами

$$D_j x(\cdot) = F^{-1}(\varphi_j(\cdot)Fx(\cdot))(\cdot), \quad j = 1, \dots, n,$$

и оператор

$$\Lambda x(\cdot) = F^{-1}(\psi(\cdot)Fx(\cdot))(\cdot) \quad (2.1)$$

(будем предполагать, что функция $\psi(\cdot)$ такова, что $\psi(\cdot)Fx(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ для $x(\cdot) \in X_p$).

Положим

$$C_p(\nu, \eta) = \hat{\gamma}^{-\hat{\gamma}/p} (1 - \hat{\gamma})^{-(1-\hat{\gamma})/2} \left(\frac{B(\hat{q}\hat{\gamma}/p + 1, \hat{q}(1 - \hat{\gamma})/2)}{2|\nu - \eta|} \right)^{1/\hat{q}},$$

где

$$\hat{\gamma} = \frac{\nu - \eta}{\nu + d(1/2 - 1/p)}, \quad \hat{q} = \frac{1}{\hat{\gamma}(1/2 - 1/p)}.$$

Из теоремы 6 работы [7] (аналогично теореме 2) вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $2 < p \leq \infty$, $\hat{\gamma} \in (0, 1)$. Предположим, что

$$I = \int_{\Pi^{d-1}} \frac{\tilde{\psi}^{\hat{q}}(\omega)}{(\sum_{j=1}^n \tilde{\varphi}_j^2(\omega))^{\hat{q}(1-\hat{\gamma})/2}} J(\omega) d\omega < \infty, \quad \Pi^{d-1} = [0, \pi]^{d-2} \times [0, 2\pi].$$

Тогда имеет место точное неравенство

$$\|\Lambda x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C_p(\nu, \eta) I^{1/\hat{q}}}{(2\pi)^{d\hat{\gamma}/2}} \|Fx(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^{\hat{\gamma}} \left(\sum_{j=1}^n \|D_j x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \right)^{(1-\hat{\gamma})/2}. \quad (2.2)$$

Рассмотрим некоторые конкретные веса. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}_+^d$. Определим оператор D^α (производная порядка α) равенством

$$D^\alpha x(\cdot) = F^{-1}((i\xi)^\alpha Fx(\xi))(\cdot),$$

где $(i\xi)^\alpha = (i\xi_1)^{\alpha_1} \dots (i\xi_d)^{\alpha_d}$. Ясно, что если $x(\cdot)$ – достаточно гладкая функция на \mathbb{R}^d , $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$ и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d$, то

$$D^\alpha x(t) = \frac{\partial x^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d}(t)}{\partial t_1^{\alpha_1} \dots \partial t_d^{\alpha_d}}.$$

Положим

$$\psi_\theta(\xi) = (|\xi_1|^\theta + \dots + |\xi_d|^\theta)^{2/\theta}, \quad \theta > 0.$$

Через $\Lambda_\theta^{\eta/2}$ обозначим оператор Λ , определенный равенством (2.1) для $\psi(\xi) = \psi_\theta^{\eta/2}(\xi)$. В частности, $\Lambda_2 = -\Delta$, где Δ – оператор Лапласа. Получим точное неравенство (2.2) для $\Lambda = \Lambda_\theta^{\eta/2}$ и $D_j = D^{\nu e_j}$, $j = 1, \dots, d$, где $\{e_j\}$ – стандартный базис в \mathbb{R}^d .

Для $\varphi_j(\xi) = (i\xi_j)^\nu$ имеем $\tilde{\varphi}_j(\omega) = \tilde{t}_j^\nu(\omega)$, где

$$\begin{aligned} \tilde{t}_1(\omega) &= |\cos \omega_1|, \\ \tilde{t}_2(\omega) &= |\sin \omega_1 \cos \omega_2|, \\ &\dots\dots\dots \\ \tilde{t}_{d-1}(\omega) &= |\sin \omega_1 \sin \omega_2 \cdots \sin \omega_{d-2} \cos \omega_{d-1}|, \\ \tilde{t}_d(\omega) &= |\sin \omega_1 \sin \omega_2 \cdots \sin \omega_{d-2} \sin \omega_{d-1}|. \end{aligned}$$

Заметим, что $\sum_{k=1}^d \tilde{t}_k^2(\omega) = 1$.

Для величины I из теоремы 3 имеем

$$I = \int_{\Pi^{d-1}} \frac{(\sum_{k=1}^d \tilde{t}_k^\theta(\omega))^{\hat{q}\eta/\theta} J(\omega) d\omega}{(\sum_{k=1}^d \tilde{t}_k^{2\nu}(\omega))^{\hat{q}(1-\hat{\gamma})/2}}. \tag{2.3}$$

Если $\nu \leq 1$, то

$$\sum_{k=1}^d \tilde{t}_k^{2\nu}(\omega) \geq \sum_{k=1}^d \tilde{t}_k^2(\omega) = 1. \tag{2.4}$$

Если же $\nu > 1$, то по неравенству Гёльдера

$$1 = \sum_{k=1}^d \tilde{t}_k^2(\omega) \leq \left(\sum_{k=1}^d \tilde{t}_k^{2\nu}(\omega) \right)^{1/\nu} d^{1-1/\nu}.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^d \tilde{t}_k^{2\nu}(\omega) \geq d^{1-\nu}. \tag{2.5}$$

Из (2.4) и (2.5) вытекает, что $I < \infty$.

Теорема 3 доказана.

Из теоремы 3 получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $2 < p \leq \infty$ и $\nu > \eta \geq 0$. Тогда имеет место точное неравенство

$$\|\Lambda_\theta^{\eta/2} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C_p(\nu, \eta) I^{1/\hat{q}}}{(2\pi)^{d\hat{\gamma}/2}} \|Fx(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^{\hat{\gamma}} \left(\sum_{j=1}^d \|D^{\nu e_j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \right)^{(1-\hat{\gamma})/2},$$

где I определено равенством (2.3).

В частности, при $\theta = 2$, $\nu \in \mathbb{Z}$, $2 < p \leq \infty$ и $\nu > \eta \geq 0$ имеет место точное неравенство

$$\|(-\Delta)^{\eta/2} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C_p(\nu, \eta) I^{1/\hat{q}}}{(2\pi)^{d\hat{\gamma}/2}} \|Fx(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^{\hat{\gamma}} \left(\sum_{j=1}^d \left\| \frac{\partial^\nu x}{\partial t_j^\nu}(\cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \right)^{(1-\hat{\gamma})/2}.$$

Пусть теперь $\Lambda = D^\alpha$, а $D_j = D^{\nu e_j}$, $j = 1, \dots, d$. Тогда величина I из теоремы 3 имеем вид

$$I = \int_{\Pi^{d-1}} \frac{(\tilde{t}_1^{\alpha_1}(\omega) \cdots \tilde{t}_d^{\alpha_d}(\omega))^{q_1} J(\omega) d\omega}{\left(\sum_{k=1}^d \tilde{t}_k^{2\nu}(\omega)\right)^{q_1(1-\gamma_1)/2}}, \quad (2.6)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\nu - |\alpha|}{\nu + d(1/2 - 1/p)}, \quad q_1 = \frac{1}{\gamma_1(1/2 - 1/p)}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d.$$

Из (2.4) и (2.5) вытекает, что $I < \infty$. Из теоремы 3 получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $2 < p \leq \infty$ и $\nu > |\alpha| \geq 0$. Тогда имеет место точное неравенство

$$\|D^\alpha x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{\tilde{C}_p(\nu, |\alpha|) I^{1/q_1}}{(2\pi)^{d\gamma_1/2}} \|Fx(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^{\gamma_1} \left(\sum_{j=1}^d \|D^{\nu e_j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \right)^{(1-\gamma_1)/2},$$

где

$$\tilde{C}_p(\nu, |\alpha|) = \gamma_1^{-\gamma_1/p} (1 - \gamma_1)^{-(1-\gamma_1)/2} \left(\frac{B(q_1\gamma_1/p + 1, q_1(1 - \gamma_1)/2)}{2(\nu - |\alpha|)} \right)^{1/q_1},$$

а I определено равенством (2.6).

Получим точное неравенство для оператора $\Lambda_\theta^{\eta/2}$ для случая, когда $p = 2$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\nu > \eta > 0$ и $0 < \theta \leq 2\nu$. Тогда имеет место точное неравенство

$$\|\Lambda_\theta^{\eta/2} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{d^{\eta(1/\theta - 1/(2\nu))}}{(2\pi)^{d(1-\eta/\nu)/2}} \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{1-\eta/\nu} \left(\sum_{j=1}^d \|D^{\nu e_j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \right)^{\eta/(2\nu)}. \quad (2.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|\Lambda_\theta^{\eta/2} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \rightarrow \max, \quad \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \delta^2, \quad \sum_{j=1}^d \|D^{\nu e_j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq 1. \quad (2.8)$$

Для $0 < \varepsilon < (2\pi)^{d/(2\nu)} (d\delta^2)^{-1/(2\nu)}$ положим

$$\hat{\xi}_\varepsilon = \left(\frac{(2\pi)^d}{d\delta^2} \right)^{1/(2\nu)} (1, \dots, 1) - (\varepsilon, \dots, \varepsilon), \quad B_\varepsilon = \{\xi \in \mathbb{R}^d : |\xi - \hat{\xi}_\varepsilon| < \varepsilon\}.$$

Рассмотрим функцию $x_\varepsilon(\cdot)$ такую, что

$$Fx_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} \frac{\delta}{\sqrt{\text{mes } B_\varepsilon}}, & \xi \in B_\varepsilon, \\ 0, & \xi \notin B_\varepsilon. \end{cases}$$

Тогда $\|Fx_\varepsilon(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = \delta^2$ и

$$\sum_{j=1}^d \|D^{\nu e_j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = \frac{\delta^2}{(2\pi)^d \text{mes } B_\varepsilon} \sum_{j=1}^d \int_{B_\varepsilon} |\xi_j|^{2\nu} d\xi \leq 1.$$

Поэтому функция $x_\varepsilon(\cdot)$ является допустимой в задаче (2.8). Обозначив значение этой задачи через S , имеем

$$S \geq \|\Lambda_\theta^{\eta/2} x_\varepsilon(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = \frac{\delta^2}{(2\pi)^d \text{mes } B_\varepsilon} \int_{B_\varepsilon} \psi_\theta^\eta(\xi) d\xi = \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \psi_\theta^\eta(\tilde{\xi}_\varepsilon), \quad \tilde{\xi}_\varepsilon \in B_\varepsilon.$$

Устремляя ε к нулю, получаем

$$S \geq d^{\eta(2/\theta-1/\nu)} \left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \right)^{1-\eta/\nu}. \quad (2.9)$$

Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) &= -\|\Lambda_\theta^{\eta/2} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \lambda_1 \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \lambda_2 \left(\sum_{j=1}^d \|D^{\nu e_j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(-\psi_\theta^\eta(\xi) + (2\pi)^d \lambda_1 + \lambda_2 \sum_{j=1}^d |\xi_j|^{2\nu} \right) |Fx(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Так как $\theta \leq 2\nu$, то из неравенства Гёльдера следует, что

$$\sum_{j=1}^d |\xi_j|^\theta \leq \left(\sum_{j=1}^d |\xi_j|^{2\nu} \right)^{\theta/(2\nu)} d^{1-\theta/(2\nu)}.$$

Положив $\rho = (|\xi_1|^\theta + \dots + |\xi_d|^\theta)^{1/\theta}$, получим

$$\sum_{j=1}^d |\xi_j|^{2\nu} \geq \rho^{2\nu} d^{1-2\nu/\theta}.$$

Таким образом,

$$-\psi_\theta^\eta(\xi) + (2\pi)^d \lambda_1 + \lambda_2 \sum_{j=1}^d |\xi_j|^{2\nu} \geq f(\rho),$$

где

$$f(\rho) = -\rho^{2\eta} + (2\pi)^d \lambda_1 + \lambda_2 \rho^{2\nu} d^{1-2\nu/\theta}.$$

Положим

$$\lambda_1 = \frac{d^{\eta(2/\theta-1/\nu)}}{(2\pi)^d} \left(1 - \frac{\eta}{\nu} \right) \left(\frac{(2\pi)^d}{\delta^2} \right)^{\eta/\nu}, \quad \lambda_2 = d^{\eta(2/\theta-1/\nu)} \frac{\eta}{\nu} \left(\frac{(2\pi)^d}{\delta^2} \right)^{\eta/\nu-1}.$$

Нетрудно убедиться, что функция $f(\rho)$ достигает минимума на $[0, +\infty)$ в точке

$$\rho_0 = d^{(1/\theta-1/(2\nu))} \left(\frac{(2\pi)^d}{\delta^2} \right)^{1/(2\nu)},$$

причем $f(\rho_0) = 0$. Значит,

$$-\psi_\theta^{\eta/2}(\xi) + (2\pi)^d \lambda_1 + \lambda_2 \sum_{j=1}^d |\xi_j|^{2\nu} \geq 0.$$

Следовательно, $\mathcal{L}(x(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) \geq 0$.

Для любой допустимой в задаче (2.8) функции $x(\cdot)$ имеем

$$\begin{aligned} -\|\Lambda_\theta^{\eta/2} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 &\geq -\|\Lambda_\theta^{\eta/2} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \lambda_1 (\|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 - \delta^2) \\ &\quad + \lambda_2 \left(\sum_{j=1}^d \|D^{\nu e_j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 - 1 \right) \\ &= \mathcal{L}(x(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) - \lambda_1 \delta^2 - \lambda_2 \geq -\lambda_1 \delta^2 - \lambda_2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$S \leq \lambda_1 \delta^2 + \lambda_2 = d^{\eta(2/\theta-1/\nu)} \left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \right)^{1-\eta/\nu}.$$

Учитывая (2.9), получаем

$$S = d^{\eta(2/\theta-1/\nu)} \left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \right)^{1-\eta/\nu}. \quad (2.10)$$

Предположим, что $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и $D^{\nu e_j} x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, $j = 1, \dots, d$. Положим

$$A = \left(\sum_{j=1}^d \|D^{\nu e_j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \right)^{1/2}.$$

Тогда для $\varepsilon > 0$ и $\hat{x}(\cdot) = x(\cdot)/(A + \varepsilon)$ имеем

$$\sum_{j=1}^d \|D^{\nu e_j} \hat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = \frac{A^2}{(A + \varepsilon)^2} < 1, \quad \|F\hat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \frac{\|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}}{A + \varepsilon}.$$

Из (2.10) вытекает, что

$$\|\Lambda_\theta^{\eta/2} \hat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \frac{d^{\eta(2/\theta-1/\nu)}}{(2\pi)^{d(1-\eta/\nu)}} \|F\hat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{2(1-\eta/\nu)}.$$

Отсюда получаем

$$\|\Lambda_\theta^{\eta/2} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{d^{\eta(1/\theta-1/(2\nu))}}{(2\pi)^{d(1-\eta/\nu)/2}} \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{1-\eta/\nu} (A + \varepsilon)^{\eta/\nu}.$$

Устремляя ε к нулю, получаем неравенство (2.7).

Предположим, что существует постоянная

$$C < \frac{d^{\eta(1/\theta-1/(2\nu))}}{(2\pi)^{d(1-\eta/\nu)/2}},$$

для которой справедливо неравенство

$$\|\Lambda_{\theta}^{\eta/2} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{1-\eta/\nu} \left(\sum_{j=1}^d \|D^{\nu e_j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \right)^{\eta/(2\nu)}.$$

Тогда

$$\sup_{\substack{\|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta \\ \sum_{j=1}^d \|D^{\nu e_j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq 1}} \|\Lambda_{\theta}^{\eta/2} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C \delta^{1-\eta/\nu} < \frac{d^{\eta(1/\theta-1/(2\nu))}}{(2\pi)^{d(1-\eta/\nu)/2}} \delta^{1-\eta/\nu},$$

что противоречит (2.10).

Из (2.7) при $\theta = 2$, $\nu \in \mathbb{N}$ и $\nu > \eta > 0$ вытекает точное неравенство

$$\|(-\Delta)^{\eta/2} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{d^{\eta(1-1/\nu)/2}}{(2\pi)^{d(1-\eta/\nu)/2}} \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{1-\eta/\nu} \left(\sum_{j=1}^d \left\| \frac{\partial^{\nu} x}{\partial t_j^{\nu}}(\cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \right)^{\eta/(2\nu)}.$$

Положив $\eta = 2$, получаем, что для всех целых $\nu \geq 3$ справедливо точное неравенство

$$\|\Delta x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{d^{1-1/\nu}}{(2\pi)^{d(1-2/\nu)/2}} \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{1-2/\nu} \left(\sum_{j=1}^d \left\| \frac{\partial^{\nu} x}{\partial t_j^{\nu}}(\cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \right)^{1/\nu},$$

или (в силу того, что $\|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = (2\pi)^{d/2} \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$)

$$\|\Delta x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq d^{1-1/\nu} \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{1-2/\nu} \left(\sum_{j=1}^d \left\| \frac{\partial^{\nu} x}{\partial t_j^{\nu}}(\cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \right)^{1/\nu}.$$

Получим теперь аналог теоремы 4 для оператора $\Lambda = D^{\alpha}$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\nu > |\alpha| > 0$. Тогда имеет место точное неравенство

$$\begin{aligned} & \|D^{\alpha} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq \frac{|\alpha|^{-|\alpha|/(2\nu)}}{(2\pi)^{d(1-|\alpha|/\nu)/2}} \prod_{\substack{j=1 \\ \alpha_j \neq 0}}^d \alpha_j^{\alpha_j/(2\nu)} \|F\hat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{1-|\alpha|/\nu} \left(\sum_{j=1}^d \|D^{\nu e_j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \right)^{|\alpha|/(2\nu)}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|D^{\alpha} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \rightarrow \max, \quad \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \delta^2, \quad \sum_{j=1}^d \|D^{\nu e_j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq 1. \tag{2.12}$$

Для

$$0 < \varepsilon < \min \left\{ \left(\frac{(2\pi)^d \alpha_j}{|\alpha| \delta^2} \right)^{1/(2\nu)} : \alpha_j > 0, j = 1, \dots, d \right\}$$

ПОЛОЖИМ

$$\widehat{\xi}_\varepsilon = \left(\frac{(2\pi)^d}{|\alpha|\delta^2} \right)^{1/(2\nu)} (\alpha_1^{1/(2\nu)}, \dots, \alpha_d^{1/(2\nu)}) - (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d), \quad \varepsilon_j = \begin{cases} \varepsilon, & \alpha_j > 0, \\ 0, & \alpha_j = 0, \end{cases}$$

$$B_\varepsilon = \{\xi \in \mathbb{R}^d : |\xi - \widehat{\xi}_\varepsilon| < \varepsilon\}.$$

Рассмотрим функцию $x_\varepsilon(\cdot)$ такую, что

$$Fx_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} \frac{\delta}{\sqrt{\text{mes } B_\varepsilon}} \left(1 + d\varepsilon^{2\nu} \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \right)^{-1/2}, & \xi \in B_\varepsilon, \\ 0, & \xi \notin B_\varepsilon. \end{cases}$$

Тогда

$$\|Fx_\varepsilon(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = \delta^2 \left(1 + d\varepsilon^{2\nu} \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \right)^{-1} \leq \delta^2,$$

$$\sum_{j=1}^d \|D^{\nu e_j} x_\varepsilon(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = \frac{\delta^2}{(2\pi)^d \text{mes } B_\varepsilon} \left(1 + d\varepsilon^{2\nu} \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \right)^{-1} \sum_{j=1}^d \int_{B_\varepsilon} |\xi_j|^{2\nu} d\xi$$

$$\leq \frac{\delta^2}{(2\pi)^d \text{mes } B_\varepsilon} \left(1 + d\varepsilon^{2\nu} \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \right)^{-1} \text{mes } B_\varepsilon \left(\frac{(2\pi)^d}{|\alpha|\delta^2} \sum_{j=1}^d \alpha_j + d\varepsilon^{2\nu} \right) = 1.$$

Поэтому функция $x_\varepsilon(\cdot)$ является допустимой в задаче (2.12). Обозначив значение этой задачи через S , имеем

$$S \geq \|D^\alpha x_\varepsilon(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2$$

$$= \frac{\delta^2}{(2\pi)^d \text{mes } B_\varepsilon} \left(1 + d\varepsilon^{2\nu} \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \right)^{-1} \int_{B_\varepsilon} |\xi_1|^{2\alpha_1} \dots |\xi_d|^{2\alpha_d} d\xi$$

$$= \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \left(1 + d\varepsilon^{2\nu} \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \right)^{-1} |\tilde{\xi}_1|^{2\alpha_1} \dots |\tilde{\xi}_d|^{2\alpha_d}, \quad (\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_d) \in B_\varepsilon.$$

Устремляя ε к нулю, получаем

$$S \geq \left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \right)^{1-|\alpha|/\nu} |\alpha|^{-|\alpha|/\nu} \prod_{\substack{j=1 \\ \alpha_j \neq 0}}^d \alpha_j^{\alpha_j/\nu}. \quad (2.13)$$

Положим

$$\mathcal{L}(x(\cdot), \lambda_1, \lambda_2)$$

$$= -\|D^\alpha x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \lambda_1 \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \lambda_2 \left(\sum_{j=1}^d \|D^{\nu e_j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(-|\xi_1|^{2\alpha_1} \dots |\xi_d|^{2\alpha_d} + (2\pi)^d \lambda_1 + \lambda_2 \sum_{j=1}^d |\xi_j|^{2\nu} \right) |Fx(\xi)|^2 d\xi.$$

В функции

$$-|\xi_1|^{2\alpha_1} \cdots |\xi_d|^{2\alpha_d} + (2\pi)^d \lambda_1 + \lambda_2 \sum_{j=1}^d |\xi_j|^{2\nu}$$

сделаем замену переменных $|\xi_j|^2 = e^{t_j}$, $j = 1, \dots, d$. Получим функцию

$$G(t) = -e^{(\alpha, t)} + (2\pi)^d \lambda_1 + \lambda_2 \sum_{j=1}^d e^{\nu t_j} = e^{(\alpha, t)} H(t),$$

где $(\alpha, t) = \alpha_1 t_1 + \cdots + \alpha_d t_d$,

$$H(t) = -1 + (2\pi)^d \lambda_1 e^{-(\alpha, t)} + \lambda_2 \sum_{j=1}^d e^{\nu t_j - (\alpha, t)}.$$

Положим

$$\lambda_1 = \frac{1}{(2\pi)^d} \left(1 - \frac{|\alpha|}{\nu}\right) \left(\frac{(2\pi)^d}{|\alpha| \delta^2}\right)^{|\alpha|/\nu} \prod_{\substack{j=1 \\ \alpha_j \neq 0}}^d \alpha_j^{\alpha_j/\nu},$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\nu} \left(\frac{(2\pi)^d}{|\alpha| \delta^2}\right)^{|\alpha|/\nu - 1} \prod_{\substack{j=1 \\ \alpha_j \neq 0}}^d \alpha_j^{\alpha_j/\nu}.$$

Функция $H(\cdot)$ является выпуклой. Нетрудно убедиться, что $H(\hat{t}) = 0$, где

$$\hat{t} = \frac{1}{\nu} \left(\ln \frac{(2\pi)^d \alpha_1}{|\alpha| \delta^2}, \dots, \ln \frac{(2\pi)^d \alpha_d}{|\alpha| \delta^2} \right).$$

Кроме того, градиент функции $H(\cdot)$ в точке \hat{t} равен нулю. Отсюда следует, что $H(t) \geq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}^d$. Следовательно, $G(t) \geq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}^d$. Значит, $\mathcal{L}(x(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) \geq 0$.

Для любой допустимой в задаче (2.12) функции $x(\cdot)$ имеем

$$\begin{aligned} -\|D^\alpha x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 &\geq -\|D^\alpha x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \lambda_1 (\|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 - \delta^2) \\ &\quad + \lambda_2 \left(\sum_{j=1}^d \|D^{\nu e_j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 - 1 \right) \\ &= \mathcal{L}(x(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) - \lambda_1 \delta^2 - \lambda_2 \geq -\lambda_1 \delta^2 - \lambda_2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$S \leq \lambda_1 \delta^2 + \lambda_2 = \left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{1-|\alpha|/\nu} |\alpha|^{-|\alpha|/\nu} \prod_{\substack{j=1 \\ \alpha_j \neq 0}}^d \alpha_j^{\alpha_j/\nu}.$$

Учитывая (2.13), получаем

$$S = \left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{1-|\alpha|/\nu} |\alpha|^{-|\alpha|/\nu} \prod_{\substack{j=1 \\ \alpha_j \neq 0}}^d \alpha_j^{\alpha_j/\nu}. \tag{2.14}$$

Предположим, что $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и $D^{\nu e_j} x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, $j = 1, \dots, d$. Положим

$$A = \left(\sum_{j=1}^d \|D^{\nu e_j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \right)^{1/2}.$$

Тогда для $\varepsilon > 0$ и $\widehat{x}(\cdot) = x(\cdot)/(A + \varepsilon)$ имеем

$$\sum_{j=1}^d \|D^{\nu e_j} \widehat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = \frac{A^2}{(A + \varepsilon)^2} < 1, \quad \|F\widehat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \frac{\|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}}{A + \varepsilon}.$$

Из (2.14) вытекает, что

$$\|D^\alpha \widehat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \frac{|\alpha|^{-|\alpha|/\nu}}{(2\pi)^{d(1-|\alpha|/\nu)}} \prod_{\substack{j=1 \\ \alpha_j \neq 0}}^d \alpha_j^{\alpha_j/\nu} \|F\widehat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{2(1-|\alpha|/\nu)}.$$

Отсюда получаем

$$\|D^\alpha x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{|\alpha|^{-|\alpha|/(2\nu)}}{(2\pi)^{d(1-|\alpha|/\nu)/2}} \prod_{\substack{j=1 \\ \alpha_j \neq 0}}^d \alpha_j^{\alpha_j/(2\nu)} \|F\widehat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{1-|\alpha|/\nu} (A + \varepsilon)^{|\alpha|/\nu}.$$

Устремляя ε к нулю, получаем неравенство (2.11).

Предположим, что существует постоянная

$$C < \frac{|\alpha|^{-|\alpha|/(2\nu)}}{(2\pi)^{d(1-|\alpha|/\nu)/2}} \prod_{\substack{j=1 \\ \alpha_j \neq 0}}^d \alpha_j^{\alpha_j/(2\nu)},$$

для которой справедливо неравенство

$$\|D^\alpha x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C \|F\widehat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{1-|\alpha|/\nu} \left(\sum_{j=1}^d \|D^{\nu e_j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \right)^{|\alpha|/(2\nu)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{\|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta \\ \sum_{j=1}^d \|D^{\nu e_j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq 1}} \|D^\alpha x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq C \delta^{1-|\alpha|/\nu} < \frac{|\alpha|^{-|\alpha|/(2\nu)}}{(2\pi)^{d(1-|\alpha|/\nu)/2}} \prod_{\substack{j=1 \\ \alpha_j \neq 0}}^d \alpha_j^{\alpha_j/(2\nu)} \delta^{1-|\alpha|/\nu}, \end{aligned}$$

что противоречит (2.14).

Теорема 5 доказана.

2.2. Точные неравенства в метрике $L_\infty(\mathbb{R}^d)$. Положим

$$\widehat{\gamma}_1 = \frac{\nu - \eta - d/2}{\nu + d(1/2 - 1/p)}, \quad \widehat{q}_1 = \frac{1}{1/2 + \widehat{\gamma}_1(1/2 - 1/p)},$$

$$\widehat{C}_p(\nu, \eta) = \widehat{\gamma}_1^{-\widehat{\gamma}_1/p} (1 - \widehat{\gamma}_1)^{-(1-\widehat{\gamma}_1)/2} \left(\frac{B(\widehat{q}_1 \widehat{\gamma}_1/p + 1, \widehat{q}_1(1 - \widehat{\gamma}_1)/2)}{2|\nu - \eta - d/2|} \right)^{1/\widehat{q}_1}.$$

Из теоремы 8 работы [7] вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $\widehat{\gamma}_1 \in (0, 1)$. Предположим, что

$$I = \int_{\Pi^{d-1}} \frac{\widetilde{\psi}^{\widehat{q}_1}(\omega)}{(\sum_{j=1}^n \widetilde{\varphi}_j^2(\omega))^{\widehat{q}_1(1-\widehat{\gamma}_1)/2}} J(\omega) d\omega < \infty.$$

Тогда имеет место точное неравенство

$$\|\Lambda x(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{\widehat{C}_p(\nu, \eta) I^{1/\widehat{q}_1}}{(2\pi)^{d(1+\widehat{\gamma}_1)/2}} \|Fx(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^{\widehat{\gamma}_1} \left(\sum_{j=1}^n \|D_j x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \right)^{(1-\widehat{\gamma}_1)/2}. \quad (2.15)$$

Пусть $\Lambda = \Lambda_\theta^{\eta/2}$ и $D_j = D^{\nu e_j}$, $j = 1, \dots, d$. Тогда для величины I из теоремы 6 имеем

$$I = \int_{\Pi^{d-1}} \frac{(\sum_{k=1}^d \widetilde{t}_k^\theta(\omega))^{\widehat{q}_1 \eta/\theta} J(\omega) d\omega}{(\sum_{k=1}^d \widetilde{t}_k^{2\nu}(\omega))^{\widehat{q}_1(1-\widehat{\gamma}_1)/2}}. \quad (2.16)$$

Из (2.4) и (2.5) вытекает, что $I < \infty$. Тогда из теоремы 6 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $1 \leq p \leq \infty$ и $\nu - d/2 > \eta > 0$. Тогда имеет место точное неравенство

$$\|\Lambda_\theta^{\eta/2} x(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{\widehat{C}_p(\nu, \eta) I^{1/\widehat{q}_1}}{(2\pi)^{d(1+\widehat{\gamma}_1)/2}} \|Fx(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^{\widehat{\gamma}_1} \left(\sum_{j=1}^d \|D^{\nu e_j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \right)^{(1-\widehat{\gamma}_1)/2},$$

где I определено равенством (2.16).

Если $\Lambda = D^\alpha$, а $D_j = D^{\nu e_j}$, $j = 1, \dots, d$, то для величины I из теоремы 6 имеем

$$I = \int_{\Pi^{d-1}} \frac{(\widetilde{t}_1^{\alpha_1}(\omega) \cdots \widetilde{t}_d^{\alpha_d}(\omega))^{\widehat{q}_1} J(\omega) d\omega}{(\sum_{k=1}^d \widetilde{t}_k^{2\nu}(\omega))^{\widehat{q}_1(1-\widehat{\gamma}_1)/2}}, \quad (2.17)$$

где

$$\widetilde{\gamma}_1 = \frac{\nu - |\alpha| - d/2}{\nu + d(1/2 - 1/p)}, \quad \widetilde{q}_1 = \frac{1}{1/2 + \widetilde{\gamma}_1(1/2 - 1/p)}.$$

Из (2.4) и (2.5) вытекает, что $I < \infty$. Из теоремы 6 получаем

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $1 \leq p \leq \infty$ и $\nu - d/2 > |\alpha| > 0$. Тогда имеет место точное неравенство

$$\|D^\alpha x(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{K_p(\nu, |\alpha|) I^{1/\widetilde{q}_1}}{(2\pi)^{d(1+\widetilde{\gamma}_1)/2}} \|Fx(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^{\widetilde{\gamma}_1} \left(\sum_{j=1}^d \|D^{\nu e_j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \right)^{(1-\widetilde{\gamma}_1)/2},$$

где

$$K_p(\nu, |\alpha|) = \tilde{\gamma}_1^{-\tilde{\gamma}_1/p} (1 - \tilde{\gamma}_1)^{-(1-\tilde{\gamma}_1)/2} \left(\frac{B(\tilde{q}_1 \tilde{\gamma}_1/p + 1, \tilde{q}_1(1 - \tilde{\gamma}_1)/2)}{2(\nu - |\alpha| - d/2)} \right)^{1/\tilde{q}_1},$$

а I определено равенством (2.17).

Список литературы

- [1] F. Carlson, “Une inégalité”, *Ark. Mat. Astron. Fys. B*, **25** (1935), 1, 5 pp.
- [2] В. И. Левин, “Точные константы в неравенствах типа Карлсона”, *Докл. АН СССР*, **59:4** (1948), 635–638.
- [3] Ф. И. Андрианов, “Многомерные аналоги неравенства Карлсона и его обобщений”, *Изв. вузов. Матем.*, 1967, № 1, 3–7.
- [4] S. Barza, V. Burenkov, J. Pečarić, L.-E. Persson, “Sharp multidimensional multiplicative inequalities for weighted L_p spaces with homogeneous weights”, *Math. Inequal. Appl.*, **1:1** (1998), 53–67.
- [5] К. Ю. Осипенко, “Optimal recovery of operators and multidimensional Carlson type inequalities”, *J. Complexity*, **32:1** (2016), 53–73.
- [6] К. Ю. Осипенко, “Inequalities for derivatives with the Fourier transform”, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **53** (2021), 132–150.
- [7] К. Ю. Осипенко, “Optimal recovery and generalized Carlson inequality for weights with symmetry properties”, *J. Complexity*, **81** (2024), 101807, 35 pp.

Константин Юрьевич Осипенко
(Konstantin Yu. Osipenko)

Механико-математический факультет,
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова;
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича
Российской академии наук, г. Москва
E-mail: kosipenko@yahoo.com

Поступила в редакцию
17.09.2024 и 10.12.2024