ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО НАУЧНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
СЕВЕРО-ОСЕТИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ К. Л. ХЕТАГУРОВА
ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ СЕВЕРНАЯ ОСЕТИЯ-АЛАНИЯ

ПОРЯДКОВЫЙ АНАЛИЗ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ:

тезисы докладов
XII Международной научной конференции
(с. Цей, 12–18 июля 2015 г.)

Владикавказ
2015

ББК 22.12 + 22.18
УДК 510.12

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тезисы докладов XII Международной научной конференции (с. Цей, 12–18 июля 2015 г.).—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2015.—260 с.

Сборник содержит тезисы докладов XII Международной научной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования» (с. Цей, 12–18 июля 2015 г.), которая проведена при при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 15-31-10240.

ISBN 978-5-904695-31-6

СОДЕРЖАНИЕ

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

СЕКЦИЯ I
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

СЕКЦИЯ II

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

СЕКЦИЯ III
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

СЕКЦИЯ IV

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Пленарные доклады

КОНСТРУКЦИЯ МОДУЛЯРНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЕЙ

Н. М. Абасов
(Россия, Москва; НИУ МАИ)

1. Пусть X — произвольное вполне регулярное (тихоновское) пространство, E — некоторое K-пространство с базой B и порядковой единицей $\mathbf{1}$, совпадающей с единицей умножения в нем. Как обычно $O(X)$ и $F(X)$ классы всех, соответственно, открытых и замкнутых подмножеств пространства X. Для дальнейшего изложения удобно множество $G \in O(X)$ отождествить с соответствующей характеристической функцией $\chi_G : X \to B$. Для любых $b \in B$ и $G \in O(X)$ можно определить отображение в $b\chi_G : X \to B$, $b\chi_G(x) = b(\chi_G(x))$ $(x \in X)$ и пусть $BO(X)$ — класс всех таких отображений. Счетно-аддитивную алгебру, порожденную классом $BO(X)$ в произведении X^B, рассматриваемом с поточечными решеточными операциями для точных верхней и нижней границ, обозначим через $\mathfrak{B}^B(X)$ и назовем B-борелевой алгеброй пространства X.

Отображение P: $\mathfrak{B}^B(X) \longrightarrow E$ называется вероятностью (вероятностной мерой) на $\mathfrak{B}^B(X)$ или на X, если оно обладает свойствами:

1. $0 \leqslant P(\mathcal{B}) \leqslant \mathbf{1}, (\mathcal{B} \in \mathfrak{B}^B(X)), P(X) = \mathbf{1}$;

2. $P\big(\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i\big) = (o)\sum_{i=1}^{\infty} P(\mathcal{B}_i)$ для любого счетного семейства $(\mathcal{B}_i)$ $(i \in N)$ попарно дизъюнктных $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = 0$ $(i \neq j)$ элементов $\mathfrak{B}^B(X)$.

Свойство регулярности для векторной вероятности P определяется также, как и для скалярной, т. е. вероятность P на $(X, \mathfrak{B}^B(X))$ называется регулярной, если для всякой убывающей сети $(F_\alpha) \subset \mathfrak{F}(X)$ $(\alpha \in \mathcal{A})$ выполняется соотношение $P(\inf_\alpha\{F_\alpha\}) = \inf_\alpha\{P(F_\alpha)\}$ (см. [4]). Ясно, что свойство регулярности P можно определить и в терминах открытых подмножеств пространства X.

Определение. Вероятность $P : \mathfrak{B}^B(X) \longrightarrow E$, называется модулярной, если для любых $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}^B(X)$ и $b \in B$ выполняется равенство $P(b\mathcal{B}) = bP(\mathcal{B})$ (см. [1]).

Введем обозначения: соответственно через $W(\mathfrak{X})$ базу топологического пространства $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{V}(\mathfrak{X})$ — счетно-аддитивную алгебру порожденную $W(\mathfrak{X})$, а $\mathfrak{B}(\mathfrak{X})$ — борелеву алгебру пространства $\mathfrak{X}$.

Далее будем использовать терминологию булевозначного анализа [1].

Легко убедится, что в универсуме V^B подъем $X \uparrow = \mathfrak{X}$ является вполне регулярным пространством с базой $O(X) \uparrow$, которую обозначаем через $W(\mathfrak{X})$. Итак, пусть B — база K-пространства E, а V^B — соответствующий ей булевозначный универсум.

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{X} = X \uparrow$. Для всякой модулярной регулярной борелевой вероятности P на $(X, \mathfrak{B}^B(X))$ подъем $P \uparrow$ — регулярная вероятность на $(\mathfrak{X}, W(\mathfrak{X}))$, допускающая единственные регулярные продолжения p на $(\mathfrak{X}, \mathfrak{V}(\mathfrak{X}))$ и $\tilde{p}$ на $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}(\mathfrak{X}))$.*

2. Отображение $f : X \to E$ называется (to)-непрерывным на X, если оно переводит всякую сходящуюся сеть пространства X в сходящуюся по порядку сеть K-пространства E. Обозначим через $C_b(X, E)$ — Банаха — Канторовича решетку ограниченных (to)-непрерывных отображений f, рассматриваемая с покоординатными алгебраическими и решеточными операциями и равномерной векторной нормой из E.

Известно, что любое K-пространство с порядковой единицей $\mathbf{1}$ можно единственным способом превратить в обобщенное упорядоченное кольцо, при условии совпадения $\mathbf{1}$ с единицей умножения (см. [2]). В основных функциональных K-пространствах с единицей $\mathbf{1}$, рассматриваемых с покоординатными алгебраическими и структурными операциями сформулированное выше условие выполняется. Далее X — произвольное вполне регулярное пространство, E — некоторое K-пространство с единицей $\mathbf{1}$, для которой выполняется упомянутое выше условие. Пусть P — произвольная регулярная модулярная вероятность на $(X, \mathfrak{B}^B(X))$. Согласно продолжению 1 подъем $P\uparrow = p$ — регулярная вероятность на $W(\mathfrak{X})$, допускающая единственное регулярное борелево продолжение $\tilde{p}$ на $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}(\mathfrak{X}))$ $(\mathfrak{X} = X\uparrow)$. Для любого отображения $f \in C_b^+(X, E)$ подъем $f\uparrow = g$ — положительная ограниченная непрерывная функция на $\mathfrak{X}$ в универсуме V^B. Интеграл $\int g\, d\tilde{p}$, интерпретируемый как элемент спуска $R\downarrow$, обозначим через $\int^{\downarrow} g\, d\tilde{p}$.

Предложение 2. *Для любого отображения $f \in C_b^+(X, E)$ относительно всякой модулярной регулярной вероятности P на $(X, \mathfrak{B}^B(X))$ корректно определен интеграл соотношением:*

$$\int f\, dP = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\sum_{j=1}^{m_i} b_{ij} P(G_{ij}) \right) :\ i, j, k, m, n \in N; \right.$$
$$b_{ij} \in B,\ b_{ij} \cap b_{ik} = 0 (j \neq k),\ \sum_{j=1}^{m_i} b_{ij} = 1;$$
$$\left. G_{ij} \in O(X);\ a_i \in E^+;\ \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\sum_{j=1}^{m_i} b_{ij} \chi_{G_{ij}} \right) \leqslant f \right\}.$$

Более того, справедливо следующее равенство интегралов:

$$\int f\, dP = \int^{\downarrow} g\, d\tilde{p} \quad (g = f\uparrow).$$

3. Теорема. *Пусть X — произвольное вполне регулярное пространство, а E — некоторое K-пространство с единицей $\mathbf{1}$, совпадающей с единицей умножения в нем. Формула*

$$l(f) = \int f\, dP$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между E-значными модулярными регулярными вероятностями P на $(X, \mathfrak{B}^B(X))$ и E-значными положитель-

ными линейными операторами l на $C_b(X,E)$ — пространстве ограниченных (to)-непрерывных отображений на X, удовлетворяющими условию $l(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ и обладающими свойством порядковой непрерывности: $\inf_\gamma\{l(f_\gamma)\} = 0$ $(\gamma \in \Gamma)$, для всякой сети (f_γ) из $C_b(X,E)$ сходящейся, убывая, к нулю. Вероятность любого открытого множества $G \in O(X)$ определяется по формуле

$$P(G) = \sup\bigl\{l(f) :\ f \leqslant \chi_G,\ f \in C_b^+(X,E)\bigr\}. \tag{1}$$

Всякая E-значная модулярная регулярная вероятность P на $(X, \mathfrak{B}^B(X))$ обладает свойством аппроксимации

$$\begin{aligned}P(\mathcal{B}) = \inf\Biggl\{\sum_{i=1}^{\infty} b_i P(G_i) :\ \mathcal{B} \in \mathfrak{B}^B(X);\ \mathcal{B} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} b_i \chi_{G_i}\ (i \in N);\\ b_i \in B,\ b_i \cap b_j = 0\ (i \neq j),\ \sum_{i=1}^{\infty} b_i = \mathbf{1};\ G_i \in O(X)\Biggr\}.\end{aligned} \tag{2}$$

В частности вероятность произвольного борелева множества $M \in B(X)$ задается равенством

$$\begin{aligned}p(M) = \inf\Biggl\{\sum_{i=1}^{\infty} b_i P(G_i) :\ M \subset G_i;\ i \in N;\\ b_i \in B,\ b_i \cap b_j = 0\ (i \neq j),\ \sum_{i=1}^{\infty} b_i = 1;\ G_i \in O(X)\Biggr\}.\end{aligned} \tag{3}$$

Литература

1. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциальное исчисление. Теория и приложения.—М.: Наука, 2007.—559 с.
2. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств.—М.: Физматлит, 1961.—408 с.
3. *Lipecki Z.* Riesz Type Representation Theorems for Positive Operators.—Copenhagen, Denmark: Kopenh. Univ., Math. Inst., 1984.—13 p.
4. *Daniell P. J.* A general form of integral // Ann. Math. (2).—1917–1918.—Vol. 19.—P. 279–294.

AN ALTERNATING ROBIN–NEUMANN BOUNDARY PROBLEM AND ITS HOMOGENIZATION VIA TIME-PERIODIC UNFOLDING

M. Amar (Italy, Roma; Sapienza Università di Roma),
D. Andreucci (Italy, Roma; Sapienza Università di Roma),
D. Bellaveglia (Italy, Roma; Sapienza Università di Roma)

It is known that time alternating boundary conditions may appear in diffusion problems when modeling biological systems, for example ion currents through cell membranes. From the mathematical point of view problems of this type exhibiting oscillations in time are interesting also for the appearance of non-trivial relations between the different scalings present in the model, both in the space and in the time variables [1, 2]. Often, due to the presence of a periodic microstructure in the physical problem, one appeals to homogenization theory in order to derive a macroscopic effective mathematical scheme amenable to application [1, 2].

We present recent results on problems set in a medium with periodic inclusions (or holes); we may think of a biological tissue with cells. The interface separating the medium from the inclusions is absorbing, but only in certain intervals of time (which we call the *open* phase), being adiabatic for all other times (the *closed* phase). This calls for a boundary condition on such an interface switching periodically from the type of Robin to the type of Neumann.

Let ε be the spatial period of the microstructure (i.e., the average distance between inclusions and also their diameter), and τ the time period of the system (i. e., of the onset of successive open phases). We are interested in the asymptotic behavior when ε and τ go to 0.

Let us consider for example the model problem

$$\frac{\partial u_\tau}{\partial t} - \operatorname{div}(A^\tau \nabla u_\tau) = f, \quad (x,t) \in \Omega_\varepsilon \times (0,T), \tag{1}$$

$$A^\tau \nabla u_\tau \cdot \nu + \alpha_\tau(t) u_\tau = 0, \quad (x,t) \in \Gamma_\varepsilon \times (0,T), \tag{2}$$

$$u_\tau(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \tag{3}$$

$$u_\tau(x,0) = u_0, \quad x \in \Omega_\varepsilon. \tag{4}$$

Here the domain Ω and the possibly oscillating diffusion matrix A^τ satisfy standard assumptions; ν is the outer normal to Ω_ε which is defined as the domain Ω without the inclusions. Finally Γ_ε is the boundary of the inclusions.

The function α_τ is non-negative; in time intervals when it is strictly positive the boundary condition models absorption, when it vanishes it models insulation. This alternating behavior for example may be caused by the opening/closing of ion channels.

Actually the limiting behavior of the problem crucially depends on the time spent by the system in the absorbing phase, and the threshold discriminating among different asymptotics for $\varepsilon\,, \tau \to 0$ is $o(\tau)$.

We tackle this problem by an extension of the periodic unfolding operator to evolution problems; see e. g., [3, 4] and references therein for applications of the unfolding operator to stationary problems.

References

1. *Andreucci D., Bellaveglia D.* Permeability of interfaces with alternating pores in parabolic problems // Asymptotic Anal.—2012.—Vol. 79.—P. 189–227.
2. *Andreucci D., Bellaveglia D., Cirillo E. N. M.* A model for enhanced and selective transport through biological membranes with alternating pores // Math. Biosciences.—2014.—Vol. 257.—P. 42–49.
3. *Cioranescu D., Damlamian A., Donato P., Griso G., Zaki R.* The periodic unfolding method in domains with holes // SIAM J. Math. Anal.—2012.—Vol. 44.—P. 718–760.
4. *Cioranescu D., Damlamian A., Griso G.* The periodic unfolding method in homogenization // SIAM J. Math. Anal.—2008.—Vol. 40.—P. 1585–1620.

РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ МАТЕРИАЛОВ[1]

А. О. Ватульян (Россия, Владикавказ; ЮМИ),
С. А. Нестеров (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Конструкции из функционально-градиентных материалов (FGM) находят широкое применение в различных областях техники с большими термомеханическими нагрузками. FGM — композиты, обладающие переменными физическими свойствами, благодаря которым им в отличие от слоистых композитов удается избежать скачков термомеханических характеристик через поверхность раздела. Практическое применения FGM зависит от знания точных законов неоднородности, нахождение которых возможно только путем решения коэффициентных обратных задач (КОЗ) теплопроводности и термоупругости. Коэффициентные обратные задачи являются нелинейными задачами, главная трудность при исследовании которых — это формулировка операторной связи между искомыми и измеряемыми функциями. Однако в последние годы в ряде работ развивается новый подход к решению КОЗ для неоднородных тел. В этих работах решение нелинейных обратных задач сводится к итерационной процедуре, на каждом шаге которой решается линейное операторное уравнение, полученное на основе слабой постановки прямой задачи. Ранее этот подход был успешно применен для решения КОЗ теплопроводности и термоупругости для стержня. Однако кроме стержневых конструкций на практике часто требуется определить термомеханические характеристики и напряженно-деформированное состояние в телах цилиндрической формы, например, волноводах и трубопроводах. В данной работе полученные ранее в общем виде операторные уравнения применяются для решения задач о восстановлении на конечном временном отрезке одномерных теплофизических и термомеханических характеристик неоднородного цилиндра. В постановках обратных задач требуется восстановить одну из термомомеханических характеристик при известных остальных.

Прямая задача теплопроводности для цилиндра после обезразмеривания решается методом Галеркина. Исследование прямой задачи термоупругости для цилиндра сведено к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка в трансформантах по Лапласу на основе метода пристрелки и использования процедуры обращений, реализуемой в соответствии с методом Дурбина.

[1]Работа выполнена в рамках проекта Минобрнауки № 9.665.2014/К на выполнение научно-исследовательской работы в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности и при поддержке Программы фундаментальных исследований по стратегическим направлениям развития науки Президиума РАН № 1 «Фундаментальные проблемы математического моделирования».

Обратная задача решается на основе итерационного процесса. Начальное приближение модулей разыскивается в классе линейных функций на основе минимизации функционала невязки. Для нахождения поправок реконструируемых функций применяются полученные для цилиндра интегральные уравнения Фредгольма 1-го рода. После нахождения поправок строится новое приближение и осуществляется итерационный процесс уточнения восстанавливаемых характеристик. Критерий выхода из итерационного процесса — достижение порогового значения функционала невязки.

В ходе вычислительных экспериментов определены наиболее информативные промежутки времени для измерения смещений и температуры на внешней поверхности цилиндра и оценена погрешность реконструкции в зависимости от типа нагружения и монотонности функций, характеризующих неоднородность. Идентификация теплофизических и механических характеристик цилиндра в случае гладких законов неоднородности происходит довольно успешно: погрешность реконструкции монотонных функций не превышала 4%, а немонотонных 10%. Однако при наличии зон деструкции реконструкция происходит со значительно большей погрешностью, чем в случае медленно изменяющихся модулей. В то же время во всех случаях хорошо восстанавливались интегральные характеристики (первые моменты).

FINITE FUNCTIONS IN $C(\mathbb{R})$ AND FINITE ELEMENTS IN VECTOR LATTICES

M. R. Weber

(Germany, Dresden; TUD)

Some detailed analysis of continuous functions with compact support (i. e. finite functions) leads to the notion of finite, totally finite and selfmajorizing elements in a vector lattice E, e. g. an element $\varphi \in E$ is called *finite* if there exists an element $z \in E$ (a majorant of φ) satisfying the property: for each $x \in E$ there is a number $c_x > 0$ such that the inequality

$$|x| \wedge n|\varphi| \leqslant c_x\, z$$

holds for any $n \in \mathbb{N}$.

For a vector sublattice $H \subset E$ the relations between finite elements in H and in E are studied. In general, even a finite element in H may not be finite in E.

If the set $\mathfrak{M}(E)$ of all maximal ideals of an Archimedean vector lattice E is equipped with the hull-kernel topology τ_{hk} then the topological space $\big(\mathfrak{M}(E), \tau_{hk}\big) =: \mathfrak{M}(E)$ turns out to be a Hausdorff space but, in general, does not satisfy any stronger separation axiom. The space $\mathfrak{M}(E)$ carries many information on the vector lattice E.

The element φ is called *totally finite*, if it possesses a majorant which itself is a finite element. A finite element φ is called *selfmajorizing*, if $|\varphi|$ is a majorant of φ.

The τ_{hk}-closure $\mathrm{supp}_{\mathfrak{M}}(x)$ of the set $G_x = \{M \in \mathfrak{M}(E) : x \notin M\}$ is the so-called *abstract support* of the element x. Finite, totally finite and selfmajorizing elements in a radical-free vector lattice can be characterized by means of their abstract supports. For example, in such a vector lattice a finite element φ (with majorant z) is characterized by the compactness of its abstract support and the inclusion $\mathrm{supp}_{\mathfrak{M}}(\varphi) \subset G_z$.

The subspace $\mathfrak{M}_\Phi(E) = \bigcup\{G_\varphi \colon \varphi \text{ is a finite element in } E\}$ plays an important role for the representation of vector lattices by means of continuous functions, namely in the situation if one asks for representations, where the isomorphic image of each finite element is a functions with compact support.

References

1. *Weber M. R.* Finite Elements in Vector Lattices. Berlin–Boston: W. de Gruyter, 2014.

УРАВНЕНИЯ И ВКЛЮЧЕНИЯ С ПРОИЗВОДНЫМИ В СРЕДНЕМ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Ю. Е. Гликлих

(Россия, Воронеж; ВГУ)

Понятие производных в среднем случайных процессов было введено Э. Нельсоном в 60-х годах XX века [1].

В настоящем докладе, следуя [2], дается введение в теорию уравнений и включений с производными в среднем по Нельсону, а также обзор новых результатов из этой теории и ее приложений с упором на последние публикации автора [3–5].

Работа [4] выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках государственного задания вузам в сфере научной деятельности на 2014–2016 годы (проект 1.1539.2014/К).

Результаты статьи [5] получены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-21-00066, выполняемый в Воронежском госуниверситете).

Литература

1. *Nelson E.* Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics // Phys. Rev.—1966.—Vol. 150, № 4.—P. 1079–1085.
2. *Gliklikh Yu. E.* Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics.—London: Springer–Verlag, 2011.—460 p.
3. *Gliklikh Yu. E., Zheltikova O. O.* Stochastic equations and inclusions with mean derivatives and some applications. Optimal solutions for inclusions of geometric Brownian motion type // Methodol. Comput. Appl. Probab.—2015.—Vol. 17, № 1.—P. 91–105.
4. *Gliklikh Yu. E., Zalygaeva M. E.* Non-Newtonian fluids and stochastic analysis on the groups of diffeomorphisms // Applicable Anal.—2015.—Vol. 94, № 6.—P. 1116–1127.
5. *Gliklikh Yu. E., Mashkov E. Yu.* Stochastic Leontieff type equations with non-constant coefficients // Applicable Anal.—(in print).

АРХИМЕДИАНИЗАЦИЯ УПОРЯДОЧЕННЫХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Э. Ю. Емельянов

(Турция, Анкара, БТУ; Россия, Новосибирск, ИМ СО РАН)

Для упорядоченного векторного пространства V, обладающего сильной порядковой единицей, Верн Полсен и Марк Томфорд разработали метод архимедианизации [1], заключающийся в построении начального объекта в категории архимедовых упорядоченных пространств, через который можно факторизовать единственным образом всякий положителнай линейный оператор $V \to U$, где U архимедово упорядоченное пространство. Впоследствии метод построения архимедеанизации был расширен [2, 3] на случай произвольного упорядоченного пространства V, необязательно имеющего сильную единицу. При этом в отличии от конструкции Полсена — Томфорда, предлагаемая конструкция архимедеанизации требует в общем случае более одной итерации даже в случае векторных решеток (см. пример Накаямы, приведенный в [4]). Данный метод косвенным образом связан с известной характеризацией Векслера [5] архимедовости фактор-решеток через равномерную замкнутость порядкового идеала по которому векторная решетка факторизуется. В данном докладе обсуждаются детали и различные ньюансы метода построения архмедианизации упорядоченных пространств.

Литература

1. *Paulsen V. I., Tomforde M.* Vector spaces with an order unit // Indiana Univ. Math. J.—2009.—Vol. 58, № 3.—P. 1319–1359.
2. *Emelyanov E. Yu.* Archimedeanization of ordered vector spaces.—arXiv:1406.3657v2 [math.FA].—2014.—P. 1–10.
3. *Emelyanov E. Yu.* Archimedean cones in vector spaces // J. Conv. Anal.—(in print).
4. *Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C.* Riesz spaces. I.—Amsterdam–London–N. Y.: North-Holland, 1971.—xi+514 p.
5. *Векслер А. И.* Принцип Архимеда в гомоморфных образах ℓ-групп и векторных структур // Изв. вузов. Математика.—1966.—№ 5.—С. 33–38.

РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПРЕДЕЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА БЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОДУ

С. В. Исраилов

(Россия, Грозный; ЧГУ)

Пусть в системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad i = \overline{1, n}, \tag{1}$$

правые части определены и непрерывны в области $D : \{|y_i| \leqslant d_i;\, i = \overline{1, n},\, x \in (-\infty, +\infty)\}$ вместе с частными производными $f'_{i,y_i}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и существуют непрерывно-дифференцируемые функции $\varphi_i(x)$ при $x \in (-\infty, +\infty)$ такие, что $\lim_{x\to\pm\infty} \varphi_i(x) = 0$ и выполняются неравенства

$$\left| f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, \varphi_i(x), y_{i-1}, \ldots, y_n) - \varphi_i'(x) \right| \leqslant \psi_i(x), \quad i = \overline{1, n}, \tag{2}$$

$$\left| f_{iy_i}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \operatorname{sign}(x - x_0) \right| \leqslant \psi_i(x), \quad i = \overline{1, n},\ x_0 \in (-\infty, +\infty), \tag{3}$$

где несобственные интегралы

$$\int\limits_{x_0}^{+\infty} \psi_i(x)\, dx, \quad \int\limits_{-\infty}^{x_0} \psi_i(x)\, dx$$

сходятся, а функции $\overline{\psi}_i(x)$ таковы, что для любого числа $A > 0$ интегралы

$$\int\limits_{x_0}^{A} \overline{\psi}_i(x)\, dx, \quad \int\limits_{-A}^{x_0} \overline{\psi}_i(x)\, dx, \quad x_0 \in (-A, A), \tag{4}$$

существуют, но несобственные интегралы

$$\int\limits_{A}^{+\infty} \overline{\psi}_i(x)\, dx, \quad \int\limits_{-\infty}^{A} \overline{\psi}_i(x)\, dx \tag{5}$$

расходятся и равняются $+\infty$. Далее, допускается выполнения неравенств

$$\max \varphi_i(x)_{-\infty \leqslant x \leqslant +\infty} + \max \left\{ \int\limits_{x_0}^{+\infty} \psi_i(x)\, dx, \int\limits_{-\infty}^{x_0} \psi_i(x)\, dx \right\} \leqslant d_i, \quad i = \overline{1, n}. \tag{6}$$

Теорема. *При выполнении условий (2)–(6) система уравнений (1) имеет по крайней мере одно решение, удовлетворяющее условиям*

$$y_i(x_0) = 0, \quad \lim_{x\to\pm\infty} y_i(x) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{7}$$

Литература

1. *Исраилов С. В.* Поведение на бесконечном интервале некоторых решений сингулярных дифференциальных уравнений // Толстовские чтения: тез. докл. конф. по итогам науч.-исслед. работы за 1988 год.—Грозный: ЧГУ, 1989.—С. 17–19.
2. *Исраилов С. В., Юшаева С. С.* Многоточечные и функциональные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.—Нальчик: изд. центр «Эль-фа», 2004.—455 с.

ОБРАТНЫЕ ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ ЗАДАЧИ И АСИМПТОТИКИ

А. В. Колосова (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
В. Б. Левенштам (Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ),
С. П. Прика (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

В докладе речь пойдет о трех задачах для линейных дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных) с быстро осциллирующими по времени коэффициентами (в первой задаче) или правой частью (во второй и третьей задачах). В первой из них будут построены полные асимптотические разложения соответствующего набора линейно независимых решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с вырожденным матричным коэффициентом при производной. Этот набор тесно связан со спектром обычного для таких систем матричного пучка. Здесь мы также рассмотрим вопрос о решениях задачи Коши.

Вторая и третья задачи являются обратными задачами для уравнения переноса (в случае задачи Коши) и уравнения теплопроводности (в случае начально-краевой задачи). В обоих случаях рассматриваются уравнения с двумя независимыми переменными (x, t), причем их правые части являются произведениями двух функций, одна из которых зависит только от пространственной переменной x, а вторая — только от времени t (и большого параметра — частоты осцилляций). При этом вторая функция неизвестна. По двучленной асимптотике решения, заданной в некоторой фиксированной точке $x = x_0$, найдены указанные неизвестные функции. Точнее, построены уравнения Вольтерра 2 рода, решениями которых являются эти функции.В ходе решения указанных трех задач существенно использовались результаты и методы работ [1, 2].

Литература

1. *Шкиль Н. И.* Асимптотическое интегрирование линейных дифференциальных систем с вырождениями.—Киев: Высшая школа, 1991.—206 с.
2. *Денисов А. М.* Асимптотика решений обратных задач для гиперболического уравнения с малым параметром при старшей производной // Журн. вычислит. математики и мат. физики.—2013.—Т. 53, № 5.—С. 744–752.

О НЕОСЦИЛЛЯЦИИ УРАВНЕНИЯ НА ГРАФЕ

Р. Ч. Кулаев
(Россия, Владикавказ; ЮМИ, СОГУ)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$Lu = f(x), \quad x \in \Gamma, \tag{1}$$

заданное на геометрическом графе Γ. При этом под дифференциальным уравнением (1) на графе мы подразумеваем, следуя [1, § 3.1], набор обыкновенных дифференциальных уравнений на ребрах графа и набор условий согласования во внутренних вершинах.

В данной работе мы рассматриваем уравнение, порождаемое системой дифференциальных уравнений на ребрах γ_i графа

$$(p_i(x)u_i'')'' - (q_i(x)u_i')' = f_i(x), \quad x \in \gamma_i \subset \Gamma, \tag{2}$$

с коэффициентами, определяемыми функциями $p \in C^2[\Gamma]$, $\inf_{x\in\Gamma} p(x) > 0$, $q \in C^1[\Gamma]$, $q(x) \geqslant 0$, $f \in C[\Gamma]$, и дополняемое в каждой внутренней вершине $a \in J(\Gamma)$ равенствами

$$\begin{gathered} u_i(a) = u_k(a), \quad u_i'(a) = \alpha_{ki}(a)u_k'(a) + \alpha_{ji}(a)u_j'(a), \\ \sum_{i\in I(a)} p_i(a)\alpha_{ki}(a)u_i''(a) = 0, \quad \sum_{i\in I(a)} p_i(a)\alpha_{ji}(a)u_i''(a) = 0 \end{gathered} \tag{3}$$

и условиями с третьими производными

$$\sum_{i\in I(a)} D^3u_i(a) + \delta(a)u(a) = \widetilde{f}(a), \quad a \in J(\Gamma), \quad D^3u = (pu'')' - qu', \tag{4}$$

где $J(\Gamma)$ — множество всех внутренних вершин графа Γ, $I(a)$ — множество индексов всех ребер, примыкающих к вершине $a \in J(\Gamma)$.

Левая часть Lu уравнения (1) — это левые части уравнений (2) на ребрах вместе с равенствами (3) и левыми частями условий (4). В условиях (3), (4) все производные считаются в направлении от вершины $a \in J(\Gamma)$; k, j — фиксированные (базисные) индексы из $I(a)$, $i \in I(a)$; $\alpha_{ki}(a)$, $\alpha_{ji}(a)$ и $\delta(a)$, $\widetilde{f}(a)$ — заданные числа, причем $\alpha_{kk}(a) = \alpha_{jj}(a) = 1$ и $\alpha_{kj}(a) = \alpha_{jk}(a) = 0$, $\delta(a) \geqslant 0$; для каждой вершины $a \in J(\Gamma)$ и каждого индекса $i \in I(a)$ хотя бы одна из констант $\alpha_{ji}(a)$, $\alpha_{ki}(a)$ отлична от нуля, причем для каждой вершины $a \in J(\Gamma)$ можно задать базисные индексы $j, k \in I(a)$ так, что для некоторого индекса $i \in I(a) \setminus \{j, k\}$ одновременно будут выполняться неравенства $\alpha_{ji}(a) \leqslant 0$, $\alpha_{ki}(a) \leqslant 0$, одно из которых строгое. Также полагаем, что граф Γ является деревом и к каждой внутренней вершине примыкает не менее трех ребер.

Для каждой граничной вершины $b \in \partial\Gamma$ определим функцию $y_b(x)$, которая является решением однородного уравнения (1) на Γ и удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{gathered} y_b(b) = 0, \quad \vartheta(b)y_b'(b) - \beta(b)y_b''(b) = 1, \\ y_b(a) = 0, \quad \vartheta(a)y_b'(a) - \beta(a)y_b''(a) = 0, \quad a \in \partial\Gamma \setminus b, \end{gathered} \tag{5}$$

в которых $\vartheta, \beta \geqslant 0$, $\vartheta + \beta > 0$. Предположения относительно свойств коэффициентов уравнения (1) гарантируют однозначную разрешимость краевых задач (1), (5) (см. [2]).

Определение. Дифференциальное уравнение (1) назовем *слабо неосциллирующим*, если при $\beta \equiv 0$ каждая из функций $y_b(x)$, $b \in \partial\Gamma$, строго положительна на Γ.

Рассмотрим на $\partial\Gamma$ две пары неотрицательных функций ϑ_1, β_1 и ϑ_2, β_2, удовлетворяющих условиям $\vartheta_i + \beta_i > 0$, $i = 1, 2$.

Теорема (признак сравнения). *Пусть в каждой вершине $b \in \partial\Gamma$ выполнено неравенство*

$$\frac{\vartheta_1(b)}{\beta_1(b)} \leqslant \frac{\vartheta_2(b)}{\beta_2(b)} \quad \Big(\textit{если } \beta_i(b) = 0, \textit{ то } \frac{\vartheta_i(b)}{\beta_i(b)} = \infty\Big).$$

Тогда положительность функции Грина задачи (1), (5) с коэффициентами $\vartheta \equiv \vartheta_2$, $\beta \equiv \beta_2$ влечет положительность функции Грина задачи (1), (5) с коэффициентами $\vartheta \equiv \vartheta_1$, $\beta \equiv \beta_1$.

Следствие. *Слабая неосцилляция уравнения (1) на графе Γ эквивалентна положительности функции Грина задачи Дирихле (1), (5) с любыми допустимыми значениями коэффициентов ϑ, β.*

Литература

1. *Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В. и др.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах.—М.: Физматлит, 2004.—192 с.
2. *Кулаев Р. Ч.* О разрешимости краевой задачи для уравнения четвертого порядка на графе // Диф. уравнения.—2014.—Т. 50, № 1.—С. 27–34.

AROUND HILBERT'S 17th PROBLEM

A. G. Kusraev
(Russia, Vladikavkaz; SMI, NOSU)

In 1888 Hilbert [4] proved that there exists a real polynomial in two variables of degree six which is nonnegative on $\mathbb{R}^2$ but not a sum of squares of real polynomials and each nonnegative polynomial in two variables of degree four is a finite sum of squares of polynomials. Later, in 1893 he proved [5] that each nonnegative polynomial $p \in \mathbb{R}[x, y]$ is a finite sum of squares of rational functions from $\mathbb{R}(x, y)$. Motivated by this work Hilbert posed the following problem in his famous Address to the International Congress of Mathematicians in Paris (1900):

Hilbert's 17th problem. *Suppose that $f \in \mathbb{R}(x_1, \ldots, x_N)$ is nonnegative at all points of $\mathbb{R}^N$ where f is defined. Is f a finite sum of squares of rational functions*, or equivalently, *is there an identity $q^2 f = p_1^2 + \cdots + p_k^2$, where $q, p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_N]$ and $q \neq 0$?*

Hilbert's 17th problem was solved in the affirmative by Artin [1] in 1927.

Theorem 1 (E. Artin)**.** *If $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ is nonnegative on $\mathbb{R}^N$, then there are polynomials $q, p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_N]$, $q \neq 0$, such that $f = (p_1^2 + \cdots + p_k^2)/q^2$.*

The following improved version can be extracted from Stengle [9].

Theorem 2. *Let $\mathcal{K}$ be a totally ordered integral domain, $Q(\mathcal{K})$ be the field of quotients of $\mathcal{K}$, and $\overline{Q(\mathcal{K})}$ be a real closure of $Q(\mathcal{K})$. Let $p \in \mathcal{K}[x_1, \ldots, x_N]$ and $p(a_1, \ldots, a_N) \geqslant 0$ for all $(a_1, \ldots, a_N) \in \overline{Q(\mathcal{K})}^N$. Then there exist $p_1, \ldots, p_m, q \in Q(\mathcal{K})[x_1, \ldots, x_N]$ and $0 < k_1, \ldots, k_m \in Q(\mathcal{K})$ such that $q^2 p = k_1 p_1^2 + \cdots + k_m p_m^2$. Moreover, $q(x_1, \ldots, x_N) = 0$ if and only if $p(x_1, \ldots, x_N) = 0$ for all $x_1, \ldots, x_N \in Q(\mathcal{K})$.*

Recall some basic notions of the theory of rings; see Lambek [7]. Everywhere below K is a commutative unital ring. We call K *rationally complete* if the *complete ring of quotients* $Q(K)$ is canonically isomorphic to K or, equivalently, every irreducible fraction has domain K. The ideals of the form $A^* := \{k \in K : kA = \{0\}\}$ are called *annihilator ideals*. A commutative ring K is called *semiprime* if it has no nonzero nilpotent elements. The annihilator ideals in a commutative semiprime ring K form a complete Boolean algebra $\mathbb{A}(K)$, with intersection as infimum and annihilator as complementation. If K is commutative, semiprime, and rationally complete, then every annihilator of K is a direct summand and $\mathbb{P}(K) \simeq \mathbb{A}(K)$ with $\mathbb{P}(K)$ being the Boolean algebra of idempotents of K.

Consider commutative unital rings K and L. Say that L *extends* K if K is a subring of L and the mapping $J \mapsto J \cap K$ is one-to-one from $\mathbb{A}(L)$ onto $\mathbb{A}(K)$. Say also that L is *locally algebraic* over K whenever L extends K and, given $x \in L$ and a nonzero $I \in \mathbb{A}(K)$, there exist a nonzero $J \in \mathbb{A}(K)$, natural $n \in \mathbb{N}$, and $a_0, \ldots, a_n \in K$ such that $J \subset I$ and $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in J^*$. In the case of of semiprime regular rings L is locally algebraic over K if and only if $\mathbb{P}(K) = \mathbb{P}(L)$ and, given $x \in L$, for every nonzero $d \in \mathbb{P}(K)$ there exist a nonzero $e \in \mathbb{P}(K)$, natural $n \in \mathbb{N}$, and $a_0, \dots, a_n \in K$ such that $e \leqslant d$ and $e(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = 0$.

An *f-ring* is a lattice-ordered ring K such that $y \wedge z = 0$ implies $xy \wedge z = yx \wedge z = 0$ for all $x, y, z \in K_+$. A *band* (or *polar*) in K is each set of the form $A^{\perp} := \{k \in K : (\forall\, a \in A)\, |k| \wedge |a| = 0\}$ with $\varnothing \neq A \subset K$. The set of all bands $\mathbb{B}(K)$ in a semiprime Archimedean f-ring K coincides with $\mathbb{A}(K)$ and hence is a complete Boolean algebra, since $A^* = A^{\perp}$ for every $A \subset K$. In this note we consider only Archimedean f-rings. For a unital f-ring K the complete ring of quotients $Q(A)$ can be uniquely made an f-ring with K a sublattice of $Q(A)$. Moreover, the Boolean algebras $\mathbb{P}(Q(K))$ and $\mathbb{A}(K)$ are isomorphic.

A *real closure* of a unital f-ring K is a rationally complete f-ring $\overline{K}$ satisfying the following conditions: 1) $Q(K)$ is a subring and sublattice of $\overline{K}$ with $\overline{K}$ extending $Q(K)$, 2) $\overline{K}$ is locally algebraic over $Q(A)$, and 3) if K' is rationally complete f-ring containing $\overline{K}$ as a subring and sublattice and locally algebraic over $Q(K)$ then $K' = \overline{K}$. Say that K is *real closed* whenever $K = \overline{K}$. The main result is stated next.

Theorem 3. *Let K be an Archimedean unital f-ring and let $\overline{K}$ be its real closure, so that the embeddings $K \subset Q(K) \subset \overline{K}$ hold. If a polynomial $p \in K[x_1, \dots, x_N]$ is positive, that is $p(a_1, \dots, a_N) \geqslant 0$ for all $(a_1, \dots, a_N) \in \overline{K}^N$, then the representation $q^2p = \sum_{j=1}^m k_jp_j^2$ holds for some non-zero-divisors $0 < k_1, \dots, k_m \in Q(K)$ and some polynomials $p_1, \dots, p_m, q \in Q(K)[x_1, \dots, x_N]$ with $eq(a_1, \dots, a_N) = 0$ equivalent to $ep(a_1, \dots, a_N) = 0$ for all $e \in \mathbb{P}(Q(K))$ and $a_1, \dots, a_N \in K$.*

Our proof uses *Boolean valued analysis* [6]. The key is Gordon's result [3] stating that a commutative semiprime ring is representable as an integral domain in an appropriate Boolean valued model. Accordingly, our proof is merely an interpretation of Theorem 2 within Boolean valued model, thus demonstrating how does a Boolean valued transfer principle work in real algebraic geometry (as presented in [2] and [8]).

References

1. *Artin E.* Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate // Abh. Math. Sem. Hamburg.—1927.—Vol. 5.—P. 110–115.
2. *Bochnak J., Coste M., and Roy M.-F.* Real Algebraic Geometry.—Berlin a. o.: Springer, 1998.—x+430 p.
3. *Gordon E. I.* Rationally Complete Semiprime Commutative Rings in Boolean Valued Models of Set Theory.—Gor'kiĭ, 1983.—35 p.—(VINITI, № 3286-83).
4. *Hilbert D.* Über die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten // Math. Ann.—1888.—Vol. 32.—P. 342–350.
5. *Hilbert D.* Über ternäre definite Formen // Acta Math.—1893.—Vol. 17.—P. 169–197.
6. *Kusraev A. G. and Kutateladze S. S.* Boolean Valued Analysis: Selected Topics.—Vladikavkaz: SMI VSC RAS, 2014.—iv+400 p.
7. *Lambek J.* Lectures on rings and modules.—Toronto: Blaisdell Publ. Company, 1966.—(AMS Chelesea publishing, Providence, Rhode Island).
8. *Prestel A. and Delzell Ch. N.* Positive Polynomials: From Hilbert's 17th Problem to Real Algebra.—Berlin a. o.: Springer, 2001.—viii+267 p.
9. *Stengle G. A.* Nullstellensatz and a Positivstellensatz in semialgebraic geometry // Math. Ann.—1974.—Vol. 207.—P. 87–97.

ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИХ РЕШЕНИЯ

И. Е. Малова

(Россия, Брянск, БГУ; Владикавказ, ЮМИ)

В Концепции развития математического образования в РФ обозначено три группы проблем — мотивации изучения математики, содержания обучения, педагогических кадров, решение которых и вызвало необходимость разработки Концепции, а впоследствии и Программы ее реализации.

С решением проблемы мотивации изучения математики связана цель обеспечения отсутствия пробелов в базовых знаниях для каждого обучающегося, формирование у участников образовательных отношений установки «нет неспособных к математике детей».

Научно-методическими основами обеспечения математической успешности учащихся являются:

– системно-деятельностный подход (А. Н. Леонтьев, П. Я. Гальперин, Н. Ф. Талызина, О. Б. Епишева и др.);

– личностно ориентированное обучение (И. С. Якиманская, В. В. Сериков, Е. В. Бондаревская, И. Е. Малова и др.);

– интеллектуальное воспитание (М. А. Холодная, Э. Г. Гельфман и др.).

Системно-деятельностный подход предполагает выделение ориентировочных основ деятельности (ООД), которые позволяют учащимся самостоятельно решать математические задачи определенных видов. В методике обучения математике принято исследовать учебно-математические затруднения учащихся и разрабатывать ориентировочные основы соответствующего вида деятельности. Так были созданы схемы работы с текстовой задачей, решения задач на построение в планиметрии и построения сечений в стереометрии, решении показательных уравнений (неравенств) и множество других ООД.

Следующим этапом после разработки ООД является конструирование системы упражнений на отработку отдельных шагов ООД. Упражнения предусматривают различные частные случаи этих шагов. Существует специальная технология организации длительности учащихся по отработке шагов ООД, которая считается весьма эффективной.

Ключевым понятием личностно ориентированного обучения (ЛОО) является понятие субъектного опыта учащихся. Источниками обогащения этого опыта при обучении математике являются математическое содержание и процесс работы над ним. При ЛОО большую роль играют организация деятельности учащихся по работе с математическим содержанием (в методике обучения математике выработаны приемы эффективной работы), а также ведение учебного диалога с учащимися (в методике обучения математике выработаны правила ведения учебного диалога, который обеспечивает ведущую позицию учащихся).

Интеллектуальное воспитание предусматривает учет различных познавательных стилей учащихся, обеспечение самоуправления познавательной деятельностью.

Проблему содержания математического образования предложено решать с позиций отбора содержания в зависимости от потребностей будущих специалистов, уровня подготовки учащихся, достижений современной науки и практики. Таким образом, методические основы представления математического содержания в школьных учебниках остаются без внимания. На наш взгляд, три названные основы обеспечения математической успешности учащихся должны быть отражены в школьных учебниках математики. Иначе вся ответственность за разработку необходимого содержания, приемов работы с ним, за результаты обучения перекладывается на учителя, что является непосильной задачей даже для учителя высокой квалификации.

Проблемы кадров призвана решать система повышения квалификации учителей, поскольку вуз может заложить только основы обучения математике. К ним относятся: базовые методики обучения математике (методика формирования понятий, методика формирования умений, методика изучения теорем, методика обучения учащихся решению задач), основы конструирования и анализа урока математики.

Проведенное нами исследование выявило следующие методические проблемы учителей математики:

1) нарушение учителем закономерностей обучения математике (нарушение требований базовых методик), что является основной причиной математической неуспешности учащихся;

2) затруднения в ведении учебного диалога, выводящего учащихся на ведущие позиции в обучении, что является еще одной причиной математической неуспешности учащихся, а также причиной познавательной неактивности учащихся в процессе обучения математике;

3) математические затруднения учителя, что является еще одной причиной математической неуспешности учащихся.

Научно-методической основной обеспечения совершенствования методической деятельности учителя является теория непрерывной методической подготовки, которая предусматривает не только определенные этапы методического совершенствования, но и включение учителей в коллективную профессиональную деятельность по решению проблем математического образования.

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СТРАТЕГИИ ФОРМАЛИЗАЦИИ ИНФОРМАЦИИ КАК МЕТОДОЛОГИЧЕСКАЯ ОСНОВА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Ю. Б. Мельников (Россия, Екатеринбург; УрГЭУ),
С. В. Ширпужев (Россия, Екатеринбург; УрГЭУ)

Стратегию мы понимаем как механизм создания эталонных моделей, в частности, создания планов деятельности [1, 2]. В работе [1] показано, что если деятельность удовлетворяет некоторому набору постулатов (эти постулатам удовлетворяет рутинная проектная деятельность), то реализацию этой стратегии можно представить в виде применения комбинации стратегии адаптации известной модели (которую в этом случае можно представить в виде комбинации стратегии обогащения, редуцирования, абстрагирования или конкретизации модели, стратегии смены ролей и приоритетов и стратегии комбинирования моделей), стратегии построения новой модели (в этом случае ее можно представить как комбинацию стратегии поиска и использования аналогии, стратегии перехода от проектирования из отдельных деталей к использованию узлов и агрегатов, стратегии построения модели с носителем из характеристик, отношений или составляющих интерфейсного компонента некоторой модели), стратегии построения и использования моделей адекватности (комбинация стратегии предвкушения, стратегии приоритетного анализа, «экстремальных» ситуаций, стратегия выявления и использования ограничений).

В работе [2] получен аналогичный результат: реализацию стратегии рутинного моделирования (набор постулатов отличается от постулатов проектной деятельности) можно представить в виде применения комбинации стратегий: стратегия алгебраического построения модели (когда имеется типовой алгоритм построения нужной модели), и стратегии смены компонентов модели. Последняя в рассматриваемой ситуации может рассматриваться как комбинации стратегии построения модели по аналогии, стратегии построения модели с помощью смены ролей и приоритетов, стратегии итерационно-аппроксимационного построения модели.

Оказалось, что в случае, когда не требуется инсайт, на начальном этапе стратегия формализации информации удовлетворяет постулатам рутинной проектной деятельности [1], а на этапе получения окончательных формулировок — постулатам рутинного моделирования [2]. Следовательно, обучение формализации информации можно свести к освоению обучаемыми сравнительно небольшого набора базовых стратегий, точнее, накопление опыта использования этих стратегий. Поэтому актуальной является задача разработки методик такого обучения, поскольку задача формализации является одной из основных, например, для математики и ее применений.

Литература

1. *Мельников Ю. Б., Хрипунов И. В., Чоповда В. С.* Алгебраический подход к стратегиям проектной деятельности // Изв. УрГЭУ.—2014.—№ 2 (53).— С. 115–123.
2. *Мельников Ю. Б., Евдокимова Д. А., Дергачев Е. А., Успенский Д. А., Огородов М. С.* Стратегии построения модели // Управленец.—2014.—№ 3 (49).—С. 52–56.

НЕВЯЗКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЙ МЕЖДУ ПРОНИЦАЕМЫМИ ЦИЛИНДРАМИ[1]

А. Б. Моргулис (Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ), **К. И. Ильин** (Великобритания, Йорк; Университет Йорка)

Движение вязкой несжимаемой и однородной жидкости определяется системой Навье — Стокса

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v}, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0,$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x,t)$ — векторное поле скорости жидкости, $p = p(x,t)$ — давление, ν — вязкость, $(\mathbf{v}, \nabla)$ — ковариантная производная вдоль $\mathbf{v}$, $\Delta = \nabla\mathrm{div} - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}$. Система Навье — Стокса имеет семейство плоских вращательно-симметричных стационарных решений

$$U_\nu(r) = \beta r^{-1}; \quad V_\nu(r) = Ar^{1+\frac{\beta}{\nu}} + Br^{-1}. \tag{1}$$

где r — расстояние от оси цилиндров, U, V — радиальная и азимутальная скорости потока, $\beta = \pm 1$, константы A и B зависят от ν, β. Знак β определяет направление потока. Для краткости, в случае $\beta = 1$ будем говорить об *источнике*, в противном случае — о *стоке*.

Решения (1) описывают простое установившееся течение в зазоре между двумя коаксиальными проницаемыми цилиндрами, порождаемое вращением цилиндров, вдувом жидкости через один из цилиндров и отбором через другой. Соответствующие граничные условия имеют вид

$$u\big|_{r=1} = \beta, \quad u\big|_{r=a} = \frac{\beta}{a}, \quad v\big|_{r=1} = \gamma_1, \quad v\big|_{r=a} = \frac{\gamma_2}{a}; \quad w\big|_{r=1,a} = 0. \tag{2}$$

Здесь u, v, w — радиальная, азимутальная и осевая компоненты $\mathbf{v}$, $a > 1$. Течения (1) удовлетворяют граничным условиям (2) при должном выборе A и B. Течения (1), подчинцнные граничным условиям (2), имеют предел при $\nu \to +\infty$, и это предельное течение имеет вид

$$U = \pm r^{-1}, \quad V = \gamma_{in} r^{-1}. \tag{3}$$

где $\gamma_{in} = \gamma_1$ в случае источника, и $\gamma_{in} = \gamma_2$ в случае стока. Предельный переход от течения (3) к (1) неравномерен во всем кольце $1 < r < a$, но становится равномерным вне сколь угодно тонкой полоски вблизи *выхода* потока из области. Предельное течение (3) представляет собой решение уравнений Эйлера идеальной жидкости (они получаются из Навье — Стокса, если формально положить $\nu = 0$).

[1]Работа выполнена в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности № 1.1398.2014/К.

В докладе обсуждается устойчивость невязкого течения (3). С этой целью исследуется дискретный спектр оператора, возникающего при линеаризации уравнений Эйлера на стационарном решении (3). (Соответствующие решения линеаризованных уравнений Эйлера играют роль собственных мод малых возмущений). Ввиду симметрии задачи, исследование указанного спектра удается свести к исследованию нулей интегралов Лапласа [1].

С использованием известной теоремы Пойа удается установить, что неустойчивая (растущая при $t \to +\infty$) мода обязательно неосесимметрична. Неустойчивые моды существуют при любом значении $a = r_2/r_1$ и возникает при достаточно больших величинах γ_{in}. При этом в широком диапазоне толщин зазоров и осевых волновых чисел первой дестабилизируется плоская неосесимметричная мода.

Подробности и ссылки см. в [2–4].

Литература

1. *Седлецкий А. М.* О нулях преобразований Лапласа // Мат. заметки.—2004.—Т. 76, № 6.—С. 883–892.
2. *Ильин К. И., Моргулис А. Б.* О спектрах открытых течений идеальной жидкости в кольцевых областях// Мат. форум. Т. 8, ч. 2. Исследования по диф. уравнениям, мат. моделированию и проблемам мат. образовния.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014.—С. 112–123.—(Итоги науки. Юг России).
3. *Ilin K., Morgulis A.* Instability of an inviscid flow between rotating porous cylinders with radial flow to three-dimensional perturbations.—arXiv:1502.03600v2 [physics.flu-dyn].
4. *Ilin K., Morgulis A.* Instability of a viscous flow between rotating porous cylinders with radial flow.—arXiv:1312.2594v1 [physics.flu-dyn].

KILLING FIELDS OF CONSTANT LENGTH ON HOMOGENEOUS RIEMANNIAN MANIFOLDS

Yu. G. Nikonorov

(Russia, Vladikavkaz; SMI)

In this talk we present some structural results on the Lie algebras of transitive isometry groups of a general compact homogenous Riemannian manifold with nontrivial Killing vector fields of constant length, see [1].

Let us consider any Lie group G acted on the Riemannian manifold (M, g) by isometries. The action of a on $x \in M$ we denote by $a(x)$. We will identify the Lie algebra $\mathfrak{g}$ of G with the corresponded Lie algebra of Killing vector field on (M, g) as follows. For any $U \in \mathfrak{g}$ we consider a one-parameter group $\exp(tU) \subset G$ of isometries of (M, g) and define a Killing vector field $\widetilde{U}$ by a usual formula $\widetilde{U}(x) = \frac{d}{dt}\exp(tU)(x)|_{t=0}$.

Let (M, g) be a compact connected Riemannian manifold, G is a transitive isometry group of (M, g). We identify elements of the Lie algebra $\mathfrak{g}$ of G with Killing vector fields on (M, g) as above. Since G is compact, then we have a decomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{c} \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$, where $\mathfrak{c}$ is the center and $\mathfrak{g}_i$, $i = 1, \dots, k$, are simple ideals in $\mathfrak{g}$.

We are going to state the main results of this paper, that are formulated under the above assumptions and notations.

Theorem 1. *Let $Z = Z_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_l \in \mathfrak{g}$ be a Killing vector field of constant length on (M, g), where $1 \leqslant l \leqslant k$, $Z_0 \in \mathfrak{c}$, $Z_i \in \mathfrak{g}_i$ and $Z_i \neq 0$ for $1 \leqslant i \leqslant l$. Then the following statements hold:*

1) *For every $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant l$, we have $g(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j) = 0$ at every point of M. In particular, $g(Z_i, \mathfrak{g}_j) = 0$ and $g(Z_i, Z_j) = 0$.*

2) *Every Killing field of the type $Z_0 + Z_i$, $1 \leqslant i \leqslant l$, has constant length.*

Conversely, if for every i, $1 \leqslant i \leqslant l$, the Killing field $Z_0 + Z_i$ has constant length, and for every $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant l$, the equality $g(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j) = 0$ holds, then the Killing field $Z = Z_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_l$ has constant length on (M, g).

Corollary 1. *If (under the assumptions of Theorem 1) we have $\mathfrak{c} = 0$ and $k = l$, then every $\mathfrak{g}_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, is a parallel distribution on (M, g). Moreover, if (M, g) is simply connected, then it is a direct metric product of k Riemannian manifolds.*

Theorem 1 allows to restrict our attention on Killing vector fields of constant length of the following special type: $Z = Z_0 + Z_i$, where Z_0 is in the center $\mathfrak{c}$ of $\mathfrak{g}$ and Z_i is in the simple ideal $\mathfrak{g}_i$ in $\mathfrak{g}$. Without loss of generality we will assume that $i = 1$.

Theorem 2. *Let $Z = Z_0 + Z_1 \in \mathfrak{g}$ be a Killing vector fields of constant length on (M, g), where $Z_0 \in \mathfrak{c}$, $Z_1 \in \mathfrak{g}_1$ and $Z_1 \neq 0$, and let $\mathfrak{k}$ be the centralizer of Z (and Z_1) in $\mathfrak{g}_1$. Then either any $X \in \mathfrak{g}_1$ is a Killing field of constant length on (M, g), or the pair $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{k})$ is one of the following irreducible Hermitian symmetric pair:*

1) $(su(p+q), su(p) \oplus su(q) \oplus \mathbb{R})$, $p \geqslant q \geqslant 1$;
2) $(so(2n), su(n) \oplus \mathbb{R})$, $n \geqslant 5$;
3) $(so(p+2), so(p) \oplus \mathbb{R})$, $p \geqslant 5$;
4) $(sp(n), su(n) \oplus \mathbb{R})$, $n \geqslant 2$;
In the latter four cases the center of $\mathfrak{k}$ *is a one-dimensional Lie algebra spanned by the vector* Z_1.

If a Killing field of constant length $Z = Z_0 + Z_1$ satisfy to one of the cases 1)–4) in Theorem 2, we will say that it has *Hermitian type*. Recall that an element $U \in \mathfrak{g}$ is *regular* in $\mathfrak{g}$, if its centralizer has minimal dimension among all the elements of $\mathfrak{g}$. For Z of Hermitian type, Z_1 is not a regular element in $\mathfrak{g}_1$, since $\mathfrak{k}$ is not commutative in the cases 1)–4) of Theorem 2. Hence, we get

Corollary 2. *If* Z_1 *is a regular element in the Lie algebra* $\mathfrak{g}_1$ (*under the assumptions of Theorem 2*), *then every* $X \in \mathfrak{g}_1$ *is a Killing vector field of constant length on* (M, g).

Moreover, the following result holds.

Theorem 3. *If* $Z = Z_0 + Z_1 + \cdots + Z_k$ *is a regular element of* $\mathfrak{g}$ *and has constant length on* (M, g), *then the following assertions hold:*
1) $g(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j) = 0$ *for every* $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, k$, *at every point of* M;
2) $g(Z_0, \mathfrak{g}_i) = 0$ *for every* $i = 1, \ldots, k$, *at every point of* M;
3) *every* $X \in \mathfrak{g}_\mathfrak{s}$, *where* $\mathfrak{g}_\mathfrak{s} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$ *is a semisimple part of* $\mathfrak{g}$, *has constant length on* (M, g).

Moreover, if M *is simply connected, then* $Z_0 = 0$ *and* (M, g) *is a direct metric product of* (G_i, μ_i), $1 \leqslant i \leqslant k$, *where* G_i *is a connected and simply connected compact simple Lie group with the Lie algebra* $\mathfrak{g}_i$ *and* μ_i *is a bi-invariant Riemannian metric on* G_i.

Литература

1. *Nikonorov Yu. G.* Killing vector fields of constant length on compact homogeneous Riemannian manifolds // Preprint.—2015.—arXiv:1504.03432.

МОДЕЛИ ИНТЕРПОЛЯЦИЙ ФИНАНСОВЫХ (B,S)-РЫНКОВ[1]

И. В. Павлов (Россия, Ростов-на-Дону; РГСУ)

Настоящий доклад посвящен хааровским интерполяциям финансовых (B,S)-рынков с дискретным временем, определенных на конечных или счетных вероятностных пространствах. При этом для простоты мы считаем, что на рассматриваемых рынках торгуются акции одного типа, а сами рынки безарбитражны (относительно интерполяций арбитражных рынков см., например, работу [1]). Целью интерполирования является преобразование (расширение) неполных (B,S)-рынков в полные. Эта процедура приводит к возможности строить совершенные хеджи изначально заданных (в исходных неполных рынках) произвольных платежных обязательств (все необходимые определения и факты, связанные с фундаментальными понятиями теории арбитража и теории расчетов в стохастических финансовых моделях, можно найти в [2]).

Результат упомянутого выше интерполирования зависит от моделирования интерполирующих фильтраций. В настоящем докладе будут использованы хааровские и специальные хааровские интерполирующие фильтрации. Эти интерполирующие фильтрации могут быть случайными (см., например, [3]), но мы оставляем такого рода рассмотрения в стороне. Если исходное вероятностное пространство конечно, то интерполяционные теории для указанных выше интерполирующих фильтраций весьма близки (см., например, [4]). Если же это пространство счетно, то ситуация значительно усложняется. Лишь в последнее время удалось получить достаточные условия на счетнозначные (B,S)-рынки, допускающие возможность интерполирования с помощью специальных хааровских фильтраций (см. [5, 6]). Совсем недавно был получен результат (см. [7], подробное изложение выйдет в 2015 г. в журнале «Теория вероятностей и ее применения»), утверждающий, что такое интерполирование возможно, если (при выполнении некоторых простых необходимых условий) дисконтированные цены акции исходного счетнозначного (B,S)-рынка выражаются рациональными числами (при условии, что на каждой ветви дерева, порождающего фильтрацию, имеется лишь конечное число различных цен). В настоящем докладе будет обсуждена возможность интерполирования без предположения о конечности числа различных цен на ветвях дерева.

Основным техническим средством, используемым для построения специальных хааровских интерполяций, являются мартингальные меры исходного (B,S)-рынка, удовлетворяющие некоторому интерполяционному свойству — ослабленному свойству универсальной хааровской единственности (или, что то же самое,чисто аналитическому условию — ослабленному условию несовпадения барицентров). При этом для нахождения таких мер нужно решать специфические

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 13-01-00637а.

системы бесконечного числа переменных, состоящие из счетного числа линейных неравенств.

Отметим, что к настоящему моменту не имеется ни одного достаточного условия на счетнозначный (B, S)-рынок, которое обеспечивало бы возможность интерполирования в классе общих хааровских фильтраций.

Литература

1. *Волосатова Т. А., Павлов И. В.* Об интерполяции финансовых рынков, включая арбитражные // Обозрение прикладной и промышленной математики.—2004.—Т. 11, вып. 3.—С. 458–467.
2. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 1, 2.—М.: ФАЗИС, 1998.
3. *Пилосян Э. А., Можаев Г. А.* Методы финансовых расчетов на безарбитражных (B, S)-рынках с бесконечным числом агрессивных скупщиков акций // Обозрение прикладной и промышленной математики.—2008.—Т. 15, вып. 5.—С. 819–834.
4. *Богачева М. Н., Павлов И. В.* О хааровских расширениях безарбитражных финансовых рынков до безарбитражных и полных // Успехи мат. наук.—2002.—Т. 27, вып. 3.—С. 143–144.
5. *Павлов И. В., Цветкова И. В., Шамраева В. В.* Некоторые результаты о мартингальных мерах одношаговых моделей финансовых рынков, связанные с условием несовпадения барицентров // Вестн. РГУПС.—2012.—№ 3.—С. 177–181.
6. *Павлов И. В., Цветкова И. В., Шамраева В. В.* О существовании мартингальных мер, удовлетворяющих ослабленному условию несовпадения барицентров: конструктивистский подход. // Вестн. РГУПС.—2014.—№ 4.—С. 132–139.
7. *Pavlov I. V., Shamraeva V. V., Tsvetkova I. V.* On interpolation properties of martingale measures // Тез. докл. междунар. науч. конф. «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения. V».—Ростов н/Д.: Изд. центр ДГТУ, 2015.—С. 194–195.

ПОРЯДКОВЫЕ СВОЙСТВА ОРТОГОНАЛЬНО АДДИТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

М. А. Плиев
(Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Введение

Ортогонально аддитивные операторы в векторных решетках и более общих решеточно-нормированных пространствах, введенные первоначально в работе [1], в настоящее время активно изучаются [2–7]. В докладе будет дан обзор некоторых, недавно полученных, результатов.

Предварительные сведения

Все необходимые сведения о векторных решетках и решеточно-нормированных пространствах можно найти в монографии [8]. Пусть (V, E) и (W, F) — решеточно-нормированные пространства. Оператор $T : V \to W$ называется *ортогонально аддитивным*, если $T(u + v) = Tu + Tv$ для любых $u, v \in V$, $u \perp v$. Ортогонально аддитивный оператор $T : V \to W$ называется *мажорируемым оператором Урысона*, если существует $S \in \mathcal{U}_+^{ev}(E, F)$ такой, что $|Tv| \leqslant S|v|$ для любого $v \in V$. В этом случае говорят, что S является *мажорантой* для T. Множество всех мажорант оператора T обозначается через $\mathrm{Domin}(T)$. Наименьший элемент во множестве $\mathrm{Domin}(T)$ относительно порядка, индуцированного из $\mathcal{U}_+^{ev}(E, F)$, назвается *точной мажорантой* T и обозначается через $|T|$. Множество всех мажорируемых операторов Урысона из V в W обозначается через $\mathcal{D}_U(V, W)$.

Пусть (V, E) — решеточно-нормированное пространство и F — банахово пространство. Ортогонально аддитивный оператор $T : V \to F$ называется

• *C-компактным*, если множество $T(\mathcal{F}_v)$ предкомпактно в F для любого $v \in V$.

• *узким*, если для любых $v \in V$ и $\varepsilon > 0$ существует разбиение v на дизъюнктные осколки v_1 и v_2 такие, что $\|Tv_1 - Tv_2\| < \varepsilon$.

Здесь через $\mathcal{F}_v$ обозначается множество всех осколков элемента v.

Некоторые результаты

Теорема 1. *Пусть (V, E) — разложимое решеточно-нормированное пространство, F — банахова решетка с порядково непрерывной нормой и $T \in \mathcal{D}_U(V, F)$. Если T — C-компатный оператор, то таковым является и его точная мажоранта $|T|$.*

Теорема 2. *Пусть (V, E) — пространство Банаха — Канторовича над безатомной порядково полной векторной решеткой E и Γ — некоторое множество. Пусть $X = X(\Gamma)$ — банахова решетка вида $c_0(\Gamma)$ или $\ell_p(\Gamma)$, где $1 \leqslant p < \infty$. Тогда каждый латерально-по-норме непрерывный мажорируемый оператор Урысона $T : V \to X$ является узким.*

Литература

1. *J. M. Mazón, Segura de León S.* Order bounded orthogonally additive operators // Rev. Roumane Math. Pures Appl.—1990.—Т. 35, № 4.—С. 329–353.
2. *Гетоева А. А., Плиев М. А., Попов М. М.* Продолжение абстрактных операторов Урысона.—(направлено в печать).
3. *Ben Amor M. A., Pliev M. A.* Laterally continuous part of an abstract Uryson operator // Int. J. Math. Anal.—2013.—Vol. 7, № 58.—P. 2853–2860.
4. *Getoeva A. A., Pliev M. A.* Domination problem for orthogonally additive operators in lattice-normed spaces // Int. J. Math. Anal.—2015.—Vol. 9, № 27.—P. 1341–1352.
5. *Gumenchuk A. V., Pliev M. A., Popov M. M.* Extensions of orthogonally additive operators // Mat. Stud.—2014.—Vol. 41, № 2.—P. 214–219.
6. *Pliev M. A., Popov M. M.* Narrow orthogonally additive operators // Positivity.—2014.—Vol. 18, № 4.—P. 641–667.
7. *Pliev M. A., Popov M. M.* Dominated Uryson operators // Int. J. Math. Anal.—2014.—Vol. 8, № 22.—P. 1051–1059.
8. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—623 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

А. В. Подорога (Россия, Москва; МГУ),
И. В. Тихонов (Россия, Москва; МГУ)

Как известно, в теории транспортных потоков возникают задачи, представляющие интерес с точки зрения математической физики (см. [1]). При определенных условиях транспортный поток можно трактовать как специфический поток сплошной среды со стандартными характеристиками

$$\rho = \rho(x,t), \quad v = v(x,t), \quad q = q(x,t). \tag{1}$$

Здесь $\rho(x,t)$ и $v(x,t)$ — плотность и скорость транспортного потока в точке x в момент времени t, а $q(x,t)$ — интенсивность потока, соответствующая усредненному числу автомобилей, проходящих через точку x в момент времени t. Величины (1) связаны соотношениями, напоминающими уравнения *неразрывности*, *движения* и *состояний* из механики сплошных сред. Особо выделим связи

$$v = V(\rho), \quad 0 \leqslant \rho \leqslant \rho_{\max}, \tag{2}$$

с монотонно убывающей (невозрастающей) функцией $V(\rho)$ и

$$q = Q(\rho), \quad 0 \leqslant \rho \leqslant \rho_{\max}, \tag{3}$$

где $Q(\rho) = \rho V(\rho)$ — *фундаментальная диаграмма* дорожного движения. В докладе будут обсуждаться задачи, связанные с восстановлением зависимостей (2), (3) средствами компьютерного моделирования. Предложенный подход имитирует поток автомобилей в виде индивидуальных объектов — транспортных средств, расположенных на однополосной автодороге. Специальный интерес представляет случай кольцевой автодороги, который позволяет создавать автономные транспортные системы, движущиеся исключительно по своим внутренним правилам. Компьютерное моделирование дает возможность системно изучать целый ряд характерных явлений. Отметим, в частности, следующие темы проведенных исследований.

1. Связь макроскопических законов (1), (2) с микроскопическими параметрами индивидуальных объектов транспортного потока.

2. Наглядная реализация математических эффектов, диктуемых теорией квазилинейных дифференциальных уравнений (сильные разрывы решений, соотношение Гюгонио, бифуркации решений и т. п.).

3. Возникновение регулярных уплотнений потока (traffic jams), устойчиво движущихся как единое целое.

Многие из обсуждаемых явлений устанавливались ранее из других соображений (см. [1–8]).

Литература

1. *Гасников А. В. и др.* Введение в математическое моделирование транспортных потоков: Учеб. пособие / Под ред. А. В. Гасникова. Изд. 2-е, испр. и доп.—М.: МЦНМО, 2013.—427 с.
2. *Lighthill M. J., Whitham G. B.* On Kinematic Waves. II. A Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. Math. Phys. Scie.—1955.—Vol. 229, № 1178.—P. 317–345.
3. *Nagel K., Schreckenberg M.* A cellular automaton model for freeway traffic // J. Phys. I France.—1992.—Vol. 2, № 12.—P. 2221–2229.
4. *Смирнов Н. Н., Киселев А. Б., Никитин В. Ф., Юмашев М. В.* Математическое моделирование автотранспортных потоков.—М.: мех.-мат. фак. МГУ, 1999.—31 с.
5. *Киселев А. Б., Никитин В. Ф., Смирнов Н. Н., Юмашев М. В.* Неустановившиеся движения автотранспорта на кольцевой магистрали // Прикладная математика и механика.—2000.—Т. 64, № 4.—С. 651–658.
6. *Горицкий А. Ю., Кружков С. Н., Чечкин Г. А.* Уравнения с частными производными первого порядка: Учеб. пособие.—М.: мех.-мат. фак. МГУ, 1999.—96 с.
7. *Лакс П. Д.* Гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных.—Ижевск: НИЦ «РХД», ИКИ, 2010.—286 с.
8. *Подорога А. В., Тихонов И. В.* Квазилинейное уравнение дорожного движения и компьютерное моделирование // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения–2015: материалы науч. конф., 13–17 апреля 2015 г.—СПб: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2015.—С. 209–213.

ON SPACES DERIVABLE FROM A SOLID SEQUENCE SPACE AND A NON-NEGATIVE LOWER TRIANGULAR MATRIX

F. Polat

(Turkey, Çankiri; Çankiri Karatekin University)

The scalar field will be either the real or complex numbers. Suppose that λ is a solid sequence space over the scalar field and A is an infinite lower triangular matrix with non-negative entries and positive entries on the main diagonal such that each of its columns is in λ. For each positive integer k, the k^{th} predecessor of λ with respect to A is the solid vector space of scalar sequences x such that $A^k|x|$ is an element of λ. We denote this space by $\mathcal{A}_k$ and λ itself will be denoted by $\mathcal{A}_0$. Under reasonable assumptions, these spaces inherit some topological properties from λ. We are interested in a projective limit of the infinite product of the $\mathcal{A}_k$ consisting of sequences of sequences $(x^{(k)})$ satisfying $Ax^{(k)} = x^{(k-1)}$ for each $k > 0$. We show that for interesting classes of situations including the cases when $\lambda = l_p$ for some $p > 1$ and A is the Cesaro matrix, the space of our interest can be non-trivial.

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БУШМАНА — ЭРДЕЙИ

С. М. Ситник

(России, Воронеж; ВИ МВД)

Теория операторов преобразования составляет самостоятельный раздел современной математики, имеющий многочисленные приложения [1–4]. Важным классом операторов преобразования являются операторы Бушмана — Эрдейи. Название «операторы Бушмана — Эрдейи» было предложено автором, в последнее время оно стало общепринятым.

Изучение разрешимости и обратимости данных операторов было начато в 1960-х гг. в работах Р. Бушмана и А. Эрдейи. Операторы Бушмана–Эрдейи или их аналоги изучались также в работах T. P. Higgins, Ta Li, E. R. Love, G. M. Habibullah, K. N. Srivastava, Динь Хоанг Ань, В. И. Смирнова, Н. А. Вирченко, И. Федотовой, А. А. Килбаса, Б. Рубина, О. В. Скоромник и ряде других работ. При этом изучались задачи о решении интегральных уравнений с этими операторами, их факторизации и обращения [5].

Важность операторов Бушмана — Эрдейи во многом обусловлена их многочисленными приложениями [6–10]. Например, они встречаются в следующих вопросах теории уравнений с частными производными: при решении задачи Дирихле для уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу в четверти плоскости и установлении соотношений между значениями решений уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу на многообразии начальных данных и характеристике, теории преобразования Радона, так как в силу результатов Людвига действие преобразования Радона при разложении по сферическим гармоникам сводится как раз к операторам Бушмана — Эрдейи по радиальной переменной, при исследовании краевых задач для различных уравнений с существенными особенностями. Автором было впервые показано [8], что операторы Бушмана — Эрдейи являются операторами преобразования для дифференциального выражения Бесселя и изучены их специальные свойства именно как операторов преобразования.

В докладе рассматриваются приложения операторов преобразования Бушмана — Эрдейи различных классов к вложению пространств И. А. Киприянова в весовые пространства С. Л. Соболева, формулам для решений уравнений с частными производными с операторами Бесселя, уравнениям Эйлера — Пуассона — Дарбу, включая лемму Копсона, построению операторов обобщенного сдвига, операторам Дункла, преобразованию Радона, построению обобщенных сферических гармоник и B-гармонических полиномов, а также доказательству унитарности в пространстве Лебега обобщений классических операторов Харди. Приведен обзор результатов В. В. Катрахова по приложению операторов преобразования Бушмана — Эрдейи к построению нового класса псевдодифференциальных операторов и изучению введенного им класса краевых задач с K-следом с существенными особенностями в решениях.

Литература

1. *Carroll R. W.* Transmutation, Scattering Theory and Special Functions.—North Holland, 1982.—457 p.
2. *Carroll R. W.* Transmutation Theory and Applications.—North Holland, 1986.—351 p.
3. *Ситник С. М.* Операторы преобразования и их приложения // Исследования по соврем. анализу и мат. моделированию / Ред. Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев.—Владикавказ, 2008.—С. 226–293.
4. *Sitnik S. M.* Transmutations and Applications: a survey.—arXiv:1012.3741.—2012.—141 p.
5. *Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications.—Gordon and Breach Science Publ., 1993.—1014 p.
6. *Sitnik S. M.* Buschman–Erdelyi Transmutations, Classification and Applications.—arXiv: 1304.2114.—2013.—67 p.
7. *Sitnik S. M.* Buschman–Erdelyi transmutations, classification and applications // Analytic Methods Of Analysis And Differential Equations: AMADE 2012 / Ed. by M. V. Dubatovskaya, S. V. Rogosin.—Cottenham: Cambridge Sci. Publ., 2013.—31 p.
8. *Ситник С. М.* Унитарность и ограниченность операторов Бушмана — Эрдейи нулевого порядка гладкости // Препринт.—Институт автоматики и процессов управления ДВО АН СССР, 1990.—44 с.
9. *Ситник С. М.* Решение задачи об унитарном обобщении операторов преобразования Сонина — Пуассона // Науч. вед. Белг. гос. у-та.—2010.—вып. 18, № 5 (76).—С. 135–153.
10. *Sitnik S. M.* Some problems in the modern theory of transmutations // Spectral Theory and Differential Equations (STDE–2012): Intern. conf. in honor of Vladimir A. Marchenko's 90th birthday. B. Verkin Institute for low temperature and engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, V. Karazin Kharkiv National University. Book of abstracts.—Kharkiv, 2012.—P. 101–102.

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF DOUBLY NONLINEAR PARABOLIC SYSTEMS

A. F. Tedeev

(Russia, Vladikavkaz; SMI)

In this report we deal with a class of degenerate/singular quasilinear parabolic systems. We study a Cauchy problem in $\mathbf{R}^N$ with an initial datum in L_1. Sharp $L_1{-}L_\infty$ estimates are proved. In the degenerate case, assuming that the initial datum has compact support, we prove the optimal speed of propagation of the support.

This is joint work with professor Vincenzo Vespri.

References

1. *Andreucci D. and Tedeev A.* Optimal decay rate for degenerate parabolic equations on noncompact manifolds // Methods Appl. Anal.—(to appear).
2. *Tedeev A. and Vespri V.* Optimal behavior of the support of the solutions to a class of degenerate parabolic systems // Interfaces and Free Boundaries.—(to appear).

СПЕЦИАЛЬНЫЕ (СМЕШАННЫЕ) РЯДЫ ПО КЛАССИЧЕСКИМ ПОЛИНОМАМ ЛАГЕРРА И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

И. И. Шарапудинов

(Россия, Владикавказ; ЮМИ)

В настоящей работе рассмотрены некоторые специальные ряды по классическим полиномам Лагерра

$$L_n^\alpha(t)=\frac{1}{n!}\,t^{-\alpha}e^t\left\{t^{n+\alpha}e^{-t}\right\}^{(n)}, \tag{1}$$

которые непосредственно возникают при решении задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения путем представления наивысшей производной его решения, встречающейся в рассматриваемом уравнении, в виде ряда по указанным полиномам Лагерра $L_n^\alpha(t)$ с $\alpha=0$. Специальный (смешанный) ряд, о котором идет речь, имеет вид

$$x(t)=P_{r-1}(t)+t^r\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\hat{x}_{r,k}L_k^r(t)}{(k+1)_r}, \tag{2}$$

где

$$P_{r-1}(t)=\sum_{l=0}^{r-1}\frac{x^{(l)}(0)}{l!}\,t^j$$

— полином Тейлора. Отметим сразу, что ряд, фигурирующий в правой части равенства (2), не является рядом Фурье — Лагерра. Он имеет смешанный характер в том смысле, что коэффициенты $\widehat{x}_{r,k}$ — это коэффициенты Фурье — Лагерра производной $x^{(r)}(t)$ по полиномам Лагерра $L_k(t)=L_k^0(t)$, которые умножаются на функции Лагерра вида $\frac{x^rL_k^r(t)}{(k+1)_r}$. Кроме того, в правой части равенства (2) фигурирует полином Тейлора $P_{r-1}(t)$. В то же время частичная сумма специального ряда (2) вида

$$\mathfrak{L}_n(t)=\mathfrak{L}_n(x,t)=P_{r-1}(t)+t^r\sum_{k=0}^{n-r}\frac{\widehat{x}_{r,k}L_k^r(t)}{(k+1)_r} \tag{3}$$

представляет собой проектор на подпространство всех алгебраических полиномов $q(x)$ степени не выше n, т. е.

$$\mathfrak{L}_n(q,t)=q(t). \tag{4}$$

В самом деле, функция

$$r_n(t)=\frac{q(t)-P_{r-1}(q,t)}{t^r}$$

представляет собой алгебраический полином степени не выше $n-r$, поэтому в разложении

$$q(t) = P_{r-1}(q,t) + t^r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\widehat{q}_{r,k} L_k^r(t)}{(k+1)_r}$$

коэффициенты $\widehat{q}_{r,k}$ с $k \geqslant n-r+1$ обращаются в нуль, и следовательно,

$$q(t) = P_{r-1}(q,t) + t^r \sum_{k=0}^{n-r} \frac{\widehat{q}_{r,k} L_k^r(t)}{(k+1)_r},$$

и тем самым справедливость равенства (4) установлена.

В связи с представлением (2) возникает задача об оценке погрешности замены функции $x(t)$ ее приближенным значением $\mathfrak{L}_n(x,t)$. Другими словами, возникает задача об исследовании аппроксимативных свойств и частичных сумм $\mathfrak{L}_n(x,t)$ специального ряда (2). В настоящей работе введены новые специальные ряды по полиномам Лагерра, частным случаем которых являются ряды (2), и исследованы аппроксимативные свойства их частичных сумм.

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА КВАЗИНОРМАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

М. А. Шубарин

(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

1. В докладе предполагается рассмотрение связи между некоторыми классами локально выпуклых пространств (обладающих свойствами типа нормальности) и интерполяционными методами.

Пусть E — локально выпуклое пространство; $(|\cdot|_p)_{p\in P}$ — набор норм, задающий топологию в E; $U_p := \{x \in E : |x|_p \leqslant 1\}$. Кроме того, пусть $\mathcal{B}(X)$ — множество ограниченных подмножеств в X.

Пространство X называют [1] квазинормальным, если

$$(\forall\, p_0 \in P)\,(\exists\, p \in P)\,(\forall\, \varepsilon > 0)\,(\exists\, B \in \mathcal{B}(X))\,(U_p \subset B + U_{p_0}).$$

Пространство X называют [2] асимптотически нормальным, если

$$(\exists\, p_0 \in P)\,(\forall\, p \in P)\,(\exists\, p_1 \in P)\,(\forall\, \varepsilon > 0)\,(\exists\, \Delta > 0)\,(\forall\, x \in E)\,(|x|_p \leqslant \Delta |x|_{p_0} + \varepsilon |x|_{p_1})$$

2. Рассматриваемые в докладе интерполяционные свойства формулируются в терминах обобщенных абстрактных пространств Лоренца $\mathcal{A}_{\Phi,p}(\cdot)$ и Маринкевича $M_{\Phi,p}(\cdot)$, где Φ — характеристическая функция интерполяционного функтора. В частном случае (для $p = 1$) абстрактные пространства $\mathcal{A}_{\Phi,1}(\cdot)$ и $M_{\Phi,1}(\cdot)$ были введены в [3].

Пусть F — нормализованный интерполяционный функтор, заданный на множестве одномерных пар $[t_0\mathbb{R}, t_1\mathbb{R}]$. Отображение $\Phi : (t_0, t_1) \mapsto F(t_0\mathbb{R}, t_1\mathbb{R})$ называют характеристической функцией интерполяционного функтора (в дальнейшем подобные функции будем называть характеристическими). В обзоре В. И. Овчинникова [5] содержится анализ свойств характеристических функций.

Пример. Пусть $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — непрерывная, возрастающая функция такая, что $\varphi(+0) = 0$, $\varphi(+\infty) = +\infty$. Тогда функция

$$\Psi_\varphi(t_0, t_1) := \inf_{t>0}\left(\varphi(t)t_0 + \frac{1}{t}\,t_1\right), \quad t_0 > 0,\ t_1 > 0.$$

является соответственно характеристической.

Пусть Φ — характеристическая функция и $\overline{X} = [X_0, X_1]$ — интерполяционная пара банаховых пространств.

Пространство $\mathcal{A}_{\Phi,p}(\overline{X}) = \mathcal{A}_{\Phi,p}(X_0, X_1)$ состоит из тех $x \in X_0 + X_1$, для которых конечна норма $\|\cdot\|^{\mathcal{A}}_{\Phi,p}$,

$$\|\cdot\|^{\mathcal{A}}_{\Phi,p} := \inf\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi^p\big(\|x_k\|_0, \|x_k\|_1\big)\right)^{1/p},$$

где точная нижняя грань берется по множеству разложений

$$x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k, \quad x_k \in X_0 \cap X_1.$$

Пространство $M_{\Phi,p}(\overline{X}) = M_{\Phi,p}(X_0, X_1)$ состоит из всех $x \in X_0 + X_1$, для которых конечна норма $\|\cdot\|_{\Phi,p}^M$,

$$\|x\|_{\Phi,p}^M := \begin{cases} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} \left[\dfrac{K(t,x,X_0,X_1)}{\Phi^*(t)} \right]^p \dfrac{d\,\Phi^*(t)}{\Phi^*(t)} \right\}^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \sup\limits_{t_0>0,\, t_1>0} \left[\dfrac{K(t_0,t_1,x,X_0,X_1)}{\Phi^*(t_0,t_1)} \right], & p = \infty. \end{cases}$$

3. Полученные результаты позволяют сформулировать достаточное условие существования базиса в пространстве Фреше. Эти условия формулируются в терминах пространственных идеалов $(DN_{\overline{\varphi}})$ и $(\Omega_{\overline{\varphi}})$, в которых $\overline{\varphi} = (\varphi_\zeta)$ — семейство, состоящее из возрастающих функций $\varphi_\zeta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. В [2–4] аналогичные классы рассматривались только для одноэлементных семейств $\overline{\varphi}$.

Литература

1. *Grothendieck A.* Sur les espaces (F) et (DF) // Summa Brazil Math.—1954.—P. 57–122.
2. *Terzioglu T., Vogt D.* On asymptotically normable Frechet spaces // Note Mat.—1991.—Vol. 11.—P. 289–296.
3. *Дмитриев В. И., Крейн С. Г., Овчиников В. И.* Основы теории интерполяции линейных операторов // Геометрия линейных пространств и теория операторов.—Ярославль, 1977.—С. 31–74.
4. *Terzioglu T. Yurdakul M., Zachariuta V.* On some normably condition // Math. Nachr.—2005.—Vol. 278, №14.—P. 1714–1725.
5. *Овчинников В. И.* Интерполяционные функции и интерполяционная конструкция Лионса — Петре // Успехи мат. наук.—Т. 69, вып. 4.—С. 103–168.

Секция I

Математический анализ и его приложения

КЛАССИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ[1]

А. В. Абанин (Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ),
Фам Чонг Тиен (Вьетнам, Ханой; Ханойский университет науки)

В докладе будет представлен новый подход к изучению классических операторов (дифференцирования, интегрирования и др.) в весовых пространствах голоморфных функций, основанный на использовании канонических весов [1]. Он позволяет проводить исследования в случае областей и весов общего вида, в то время как прежние методы [2] были пригодны только для круга и всей плоскости и радиальных весов. Более того, за счет развитых методов и полученных с их помощью результатов общего характера полностью описан класс радиальных весов, для которых соответствующий оператор непрерывно действует из одного весового пространства в другое. Попутно установлены новые описания некоторых классов радиальных весов, используемых в решении ряда задач теории весовых пространств голоморфных функций [3].

Литература

1. *Abanin A. V., Pham Trong Tien.* Continuation of holomorphic functions with growth conditions and some of its applications // Stud. Math.—2010.—Vol. 200.—P. 279–295.
2. *Harutyunyan A., Lusky W.* On the boundedness of the differentiationoperator between weighted spaces of holomorphic functions // Stud. Math.—2008.—Vol. 184.—P. 233–247.
3. *Domański P., Lindström M.* Sets of interpolation and sampling for weighted Banach spaces of holomorphic functions // Ann. Polon. Math.—2002.—Vol. 79.—P. 233–264.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 15-01-01404а, и NAFOSTED, project № 101.02-2014.49.

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ДИСКРЕТНЫХ СУММ ФУРЬЕ ДЛЯ КУСОЧНО-ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Г. Г. Акниев

(Россия, Москва; ДНЦ РАН)

Пусть $C_{2\pi}$ — пространство непрерывных 2π-периодических функций с нормой

$$\|f\| = \max_x |f(x)|.$$

Обозначим через $E_n(f)$ наилучшее приближение функции тригонометрическими полиномами порядка n. Пусть $N \geqslant 2$ — целое положительное число, $u = u_N$ — вещественное число и

$$t_k = t_k^{(N)} = u + \frac{2\pi k}{N} \quad (0 \leqslant k \leqslant N-1)$$

система узловых точек. Обозначим через

$$L_{n,N}(f) = L_{n,N}(f,x) \quad (0 \leqslant n \leqslant N/2)$$

тригонометрический полином порядка n с наименьшим квадратичным отклонением от f на сетке $\omega_N = \{t_k\}_{k=0}^{N-1}$. Другими словами, $L_{n,N}(f)$ достигает наибольшей нижней границы сумм

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left| f(t_k) - T_n(t_k) \right|^2$$

на множестве тригонометрических полиномов T_n порядка n. В частности, $L_{[N/2],N}(f,x)$ — интерполяционный полином, совпадающий с функцией $f(x)$ в точках ω_N. Полином $L_{n,N}(f,x)$ можно представить в виде

$$L_{n,N}(f,x) = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu^{(N)}(f) e^{i\nu x},$$

где

$$c_\nu^{(N)}(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-i\nu t_k}.$$

Далее, пусть

$$S_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikx}$$

— сумма Фурье функции f, где

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{i\nu t} dt.$$

В работе [1] доказано, что если ряд Фурье для функции f сходится в точках $t_k = u + 2k\pi/N$, то имеет место

$$L_{n,N}(f,x) = S_n(f,x) + R_{n,N}(f,x),$$

когда $2n < N$, где $S_n(f,x)$ — ряд Фурье для функции f и

$$R_{n,N}(f,x) = \frac{2}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t)\cos\mu N(u-t)f(t)\,dt.$$

В настоящей работе получена оценка $R_{n,N}(f,x) = O(N^{-2})$ в случае, когда $f(x)$ — кусочно-гладкая функция.

Литература

1. *Sharapudinov I. I.* On the best approximation and polynomials of the least quadratic deviation // Anal. Math.—1983.—Vol. 9.—P. 223–234.

КОНЕЧНОМЕРНОСТЬ G-ПРОСТРАНСТВА НЕПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ С ВЫДЕЛЕННЫМ СЕМЕЙСТВОМ ОТРЕЗКОВ[1]

П. Д. Андреев

(Россия, Архангельск; САФУ)

В книге Г. Буземана и Б. Пхадке [1] определяются так называемые хордовые пространства или G-пространства с выделенным семейством отрезков. Для такого класса пространств там же изучается свойство неположительности кривизны. Известная проблема Буземана — проблема конечномерности G-пространств автоматически может быть перенесена на класс хордовых пространств.

В случае, когда G-пространство имеет строго выпуклые шары малого радиуса, проблема конечномерности была решена В. Н. Берестовским в [2]. Некоторая модификация метода В. Н. Берестовского применительно к хордовым пространствам позволила получить следующий результат.

Теорема 1. *Пусть X — G-пространство неположительной кривизны относительно выделенного семейства отрезков. Тогда оно имеет конечную топологическую размерность.*

Литература

1. *Busemann H., Phadke B.* Spaces with distinguished geodesics.—N. Y., Basel: Marcel Dekker Inc., 1987.
2. *Берестовский В. Н.* К проблеме конечномерности G-пространства Буземана // Сиб. мат. журн.—1977.—Т. 18, № 1.—С. 219–221.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 14-01-00219.

КАНОНИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ «МЕТАЛЛИЧЕСКОГО СЕМЕЙСТВА» НА ОДНОРОДНЫХ k-СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

В. В. Балащенко

(Беларусь, Минск; БелГУ)

Классическими аффинорными структурами на гладких многообразиях традиционно являются почти комплексные структуры J ($J^2 = -id$), структуры почти произведения $P(P^2 = id)$, f-структуры К. Яно ($f^3 + f = 0$) и ряд других. В то же время имеется немало работ, в которых изучаются аффинорные структуры, определяемые иными полиномиальными условиями. Например, в работе [1] введен в рассмотрение класс так называемых *«золотых» структур*, которые введены посредством аффинора F, удовлетворяющего уравнению $F^2 = F+id$. Такое условие инициировано квадратным уравнением $x^2-x-1=0$, положительный корень которого $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$ есть известное золотое сечение (число Фидия).

Недавно в работе [2] рассмотрен более общий класс аффинорных структур F так называемого *металлического семейства*, которые определяются уравнением $F^2 = pF + qI$, где p и q — натуральные числа, $I = id$. Для такого семейства структур инициирующее квадратное уравнение имеет вид $x^2 - px - q = 0$, а его положительный корень $\sigma_{p,q}$ называется (p, q)-*металлическим* числом (Vera W. de Spinadel [3]). Частными случаями являются: золотое число ($p = q = 1$); серебряное число ($p = 2, q = 1$); бронзовое число ($p = 3$, $q = 1$); медное число ($p = 1$, $q = 2$) и др.

Известно, что любая структура почти произведения P порождает две металлические структуры на многообразиии M:

$$F_1 = \frac{p}{2}\,I + \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right) P, \quad F_2 = \frac{p}{2}\,I - \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right) P.$$

Обратно, любая металлическая структура F на M определяет две структуры почти произведения:

$$P = \pm\left(\frac{2}{2\sigma_{p,q} - p}\,F - \frac{p}{2\sigma_{p,q} - p}\,I\right).$$

Важно отметить, что соответствующие друг другу структуры F и P порождают одни и те же распределения на многообразии M, а потому свойства этих структур во многом совпадают.

Естественным является вопрос о существовании инвариантных структур металлического семейства на однородных многообразиях $M = G/H$ групп Ли. Утвердительный ответ может быть получен в рамках теории обобщенных симметрических пространств. Более того, с использованием полного описания канонических структур почти произведения на однородных k-симметрических пространствах (см., например, [4, 5]) получены формулы для всех канонических структур «металлического семейства» на таких пространствах. Ситуация детализирована как для малых порядков $k = 4, 5, 6$, так и для частных типов металлических структур. Например, все металлические структуры на однородных 4-симметрических пространствах имеют вид

$$F = \frac{p}{2}\, I \pm \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right) \theta^2.$$

Заметим, что многие из ранее полученных результатов о канонических распределениях и структурах на однородных k-симметрических пространствах (см., например, [6]) могут быть адаптированы и переформулированы в терминах металлических структур.

Литература

1. *Crasmareanu M., Hretcanu C.-E.* Golden differential geometry // Chaos, Sol. Fract.—2008.—Vol. 38.—P. 1229–1238.
2. *Hretcanu C.-E., Crasmareanu M.* Metallic structures on Riemannian manifolds // Rev. Union Mat. Argentina.—2013.—Vol. 54, № 2.—P. 15–27.
3. *Spinadel V. W.* de The metallic means family and forbidden symmetries // Int. Math. J.—2002.—Vol. 2, № 3.—P. 279–288.
4. *Балащенко В. В., Степанов Н. А.* Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных Ф-пространствах // Мат. сб.—1995.—Т. 186, № 11.—С. 3–34.
5. *Балащенко В. В., Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В.* Однородные пространства: теория и приложения.—Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2008.—280 с.
6. *Balashchenko V. V.* Canonical distributions on Riemannian homogeneous k-symmetric spaces // J. Geom. Phys.—2015.—Vol. 87.—P. 30–38.

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ НИЖНЕГО ТИПА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ПОРЯДКА $\rho \in (0,1)$ С КОРНЯМИ ЗАДАННЫХ УСРЕДНЕННЫХ ПЛОТНОСТЕЙ

Г. Г. Брайчев

(Россия, Москва; МПГУ)

Классическими характеристиками роста целых функций являются тип и нижний тип, а скорость изменения нулей измеряется плотностями их распределения. Приведем точные определения.

Пусть $\mathcal{A} = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел, стремящаяся к бесконечности и выписанная в порядке неубывания модулей. Пусть далее $n_{\mathcal{A}}(r) = \sum_{0<|\lambda_n|\leqslant r} 1$ — считающая функция (с учетом кратностей) этой последовательности, а $N_{\mathcal{A}}(r) := \int_0^r \frac{n_{\mathcal{A}}(t)}{t}\,dt$ — ее интегральная, или усредненная, считающая функция.

Зададим $\rho > 0$. Верхняя и нижняя плотности при показателе ρ (ρ-плотности) последовательности $\mathcal{A}$ определяются равенствами соответственно

$$\overline{\Delta}_{\rho}(\mathcal{A}) := \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n_{\mathcal{A}}(r)}{r^{\rho}}, \quad \underline{\Delta}_{\rho}(\mathcal{A}) := \varliminf_{r\to+\infty} \frac{n_{\mathcal{A}}(r)}{r^{\rho}}.$$

Верхняя и нижняя усредненные ρ-плотности последовательности $\mathcal{A}$ определяются аналогичными равенствами

$$\overline{\Delta}^{*}_{\rho}(\mathcal{A}) := \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{N_{\mathcal{A}}(r)}{r^{\rho}}, \quad \underline{\Delta}^{*}_{\rho}(\mathcal{A}) := \varliminf_{r\to+\infty} \frac{N_{\mathcal{A}}(r)}{r^{\rho}}.$$

Типом целой функции $f(z)$ при порядке ρ (коротко, ρ-типом) называют величину

$$\sigma_{\rho}(f) := \varlimsup_{r\to+\infty} r^{-\rho} \ln \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Замена в этом равенстве верхнего предела на нижний приводит к определению нижнего ρ-типа целой функции, который будем обозначать $\underline{\sigma}_{\rho}(f)$. Влияние плотностных характеристик последовательности нулей $\mathcal{A}_f$ из $\mathbb{C}$ или из $\mathbb{R}_+$ целой функции $f(z)$ на величину ее типа полностью изучено. В настоящей работе мы дополняем описание роста целой функции порядка $\rho \in (0,1)$ при нерегулярном поведении ее нулей. Точнее, мы находим неулучшаемые оценки нижнего ρ-типа снизу через усредненные ρ-плотности корней, решая экстремальные задачи в двух принципиальных случаях: корни функции находятся на одном луче; корни функции произвольно распределены на плоскости. Речь идет о следующих экстремальных задачах.

Пусть заданы числа $\rho \in (0,1)$, $\beta^* > 0$ и $\alpha^* \in [0, \beta^*]$. Требуется вычислить экстремальные величины:

$$\underline{s}^{*}_{\mathbb{C}}(\alpha^*; \rho) := \inf\left\{\underline{\sigma}_{\rho}(f) : \mathcal{A}_f = \mathcal{A} \subset \mathbb{C},\ \underline{\Delta}^{*}_{\rho}(\mathcal{A}) = \alpha^*\right\},$$

$$\underline{s}^{*}{}_{\mathbb{C}}(\alpha^{*},\beta^{*};\rho) := \inf\bigl\{\underline{\sigma}_{\rho}(f) : \mathcal{A}_f = \mathcal{A}\subset\mathbb{C},\ \underline{\Delta}^{*}_{\rho}(\mathcal{A}) = \alpha^{*},\ \overline{\Delta}^{*}_{\rho}(\mathcal{A}) \leqslant \beta^{*}\bigr\},$$

$$\underline{s}^{*}{}_{\mathbb{R}_+}(\alpha^{*};\rho) := \inf\bigl\{\underline{\sigma}_{\rho}(f) : \mathcal{A}_f = \mathcal{A}\subset\mathbb{R}_+,\ \underline{\Delta}^{*}_{\rho}(\mathcal{A}) = \alpha^{*}\bigr\},$$

$$\underline{s}^{*}{}_{\mathbb{R}_+}(\alpha^{*},\beta^{*};\rho) := \inf\bigl\{\underline{\sigma}_{\rho}(f) : \mathcal{A}_f = \mathcal{A}\subset\mathbb{R}_+,\ \underline{\Delta}^{*}_{\rho}(\mathcal{A}) = \alpha^{*},\ \overline{\Delta}^{*}_{\rho}(\mathcal{A}) \leqslant \beta^{*}\bigr\},$$

Из полученных результатов следует, что наименьшие возможные значения нижнего ρ-типа в каждом из указанных случаев расположения нулей на плоскости не зависят от верхней усредненной ρ-плотности. Этот вывод непосредственно вытекает из следующих теорем.

Теорема 1. *Пусть $\rho > 0$. Для любых фиксированных чисел $\beta^{*} > 0$ и $\alpha^{*}\in[0,\beta^{*}]$ справедливы равенства*

$$\underline{s}^{*}{}_{\mathbb{C}}(\alpha^{*};\rho) = \underline{s}^{*}{}_{\mathbb{C}}(\alpha^{*},\beta^{*};\rho) = \alpha^{*}.$$

Нижние грани достигаются на некоторой последовательности $\widetilde{\mathcal{A}}\subset\mathbb{C}$, у которой $\underline{\Delta}^{*}{}_{\rho}(\widetilde{\mathcal{A}}) = \alpha^{*}$ и $\overline{\Delta}^{*}{}_{\rho}(\widetilde{\mathcal{A}}) = \beta^{*}$.

Теорема 2. *Пусть $\rho\in(0,1)$. Для любых фиксированных чисел $\beta^{*} > 0$ и $\alpha^{*}\in[0,\beta^{*}]$ справедливы равенства*

$$\underline{s}^{*}{}_{\mathbb{R}_+}(\alpha^{*};\rho) = \underline{s}^{*}{}_{\mathbb{R}_+}(\alpha^{*};\beta^{*},\rho) = \frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho}\,\alpha^{*}.$$

Нижние грани достигаются на некоторой возрастающей последовательности $\widetilde{\mathcal{A}}\subset\mathbb{R}_+$ с усредненными ρ-плотностями $\underline{\Delta}^{*}{}_{\rho}(\widetilde{\mathcal{A}}) = \alpha^{*}$ и $\overline{\Delta}^{*}{}_{\rho}(\widetilde{\mathcal{A}}) = \beta^{*}$.

КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА

Х. Х. Бурчаев

(Россия, Грозный; ЧГУ)

Основные определения. $D(R) = \{z \in \mathbb{C}; |z| < R\}$, $R \geqslant 1$; $D = D(1)$, $t = e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$; $A(A(R))$ — множество функций, аналитических в $D(D(R))$; $d\sigma$ – нормированная мера Лебега на D; A_p — пространство Бергмана — подпространство пространства $L_p(D)$, $1 \leqslant p < \infty$, порожденное функциями из A; $A_p^{\perp} = \{x : x \in L_q(D), 1/p + 1/q = 1, \iint_D x(z)f(z)d\sigma = 0, f \in A_p\}$; $l \in A_p^*$: $l(\varphi) = \iint_D \varphi(z)\bar{\omega}(z)d\sigma$, $\omega \in A_q$; $F(z)$ — экстремальный элемент (э. э.) функционала $l(\varphi)$: $\{\|F\| \leqslant 1, l(F) = \|l\|\}$; χ — элемент наилучшего приближения (э. н. п.) для для $\bar{\omega}(z)$: $\chi \in L_q(D), \|\bar{\omega} - \chi\|_{L_q} = \inf\{\|\bar{\omega} - x\|_{L_q}, x \in A_p^{\perp}\}$; $\chi(t)$ — граничные значения $\chi(z)$ по некасательным путям.

В последние полвека появилось много публикаций, посвященных изучению свойств э. э. и э. н. п. в пространствах аналитических функций (при различных ограничениях на ядро функционала). Отметим среди них [1–4]. Продолжением подобных исследования являются

Теорема 1. *Если $\omega \in A(R)$, то $F \in A(R)$.*

Теорема 2. *Пусть $2 < p < \infty$, $\omega \in A(R)$, тогда $\chi(t) = \bar{\psi}(t) + \psi_0(t)$, $\psi, \psi_0 \in A(R)$.*

Теорема 3. *Если $1 \leqslant p < 2$, $\omega \in A(R)$, то $\chi(t) = \bar{\psi}(t) + \psi_0(t)$, где функции $\psi(z)$ и $\psi_0(z)$ аналитичны на $\overline{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leqslant 1\}$.*

Литература

1. *Рябых В. Г.* Экстремальные задачи для суммируемых аналитических функций // Сиб. мат. журн.—1986.—Т. 27, № 3.—С. 212–217.
2. *Бурчаев Х. Х., Рябых В. Г., Рябых Г. Ю.* Аналитичность в $\mathbb{C}$ экстремальных функций функционала, образованного полиномом, над пространством Бергмана // Мат. форум. Т. 8, ч. 1. Исследования по мат. анализу. Итоги науки. Юг России.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО–А, 2014.—С. 204–214.—(Итоги науки. Юг России).
3. *Carleson L., Jacobs S.* Best approximation by analytic functions // Ark. Mat.—1972.— № 10.—P. 219–229.
4. *Khavinson D., Stessin M.* Certain linear extremal problems in Bergman Spaces of analytic functions // Indiana Univ. Math.—1997.—№ 46 (3).—P. 933–974.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тезисы докладов XII Международной научной конференции (с. Цей, 12–18 июля 2015 г.)

СТАРАЯ ПРОБЛЕМА НАХОЖДЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА[1]

Х. Х. Бурчаев (Россия, Грозный; ЧГУ),
В. Г. Рябых (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
Г. Ю. Рябых (Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ)

Основные определения. $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$; $T = \{t \in \mathbb{C}; |t| = 1\}$; $d\sigma$ — нормированная мера Лебега на D; $d\zeta$ — нормированная мера Лебега на T; A_p — пространство Бергмана — подпространство пространства $L_p(D)$, порожденное функциями, аналитическими в D, $1 \leqslant p < \infty$; H_p — обычное пространство Харди; $A_p^{\perp} = \{x : x \in L_q(D), 1/p + 1/q = 1, \iint_D x(z)z^n d\sigma = 0, n = 0, 1, \dots\}$; $\chi : \chi \in L_q(D)$, $\|\bar{\omega} - \chi\|_{L_q} = \min_{x \in A_p^{\perp}} \|\bar{\omega} - x\|_{L_q}$, $\omega \in A_q$; f — экстремальная функция линейного непрерывного функционала $l(f) : \{\|f\| \leqslant 1, |l(f)| = \|l\|\}$; $l_\omega \in A_1^*$: $l_\omega(\varphi) = \iint_D \varphi(z)\bar{\omega}(z)d\sigma$; экстремальная функция l_ω представлена в виде $f = \Phi^2 \cdot B$, где $B(z)$ — функция Бляшке функции $f(z)$, $\Phi^2(z)$ — функция, не имеющая нулей в D; a_k — нули функции $B(z)$.

Поиск полного описания множества экстремальных функций заданного линейного функционала над пространством H_1 занял более ста лет и был завершен статьями [1, 2] и монографией [3]. Первыми исследованиями экстремальных задач линейных функционалов над пространством Бергмана явились работы [4–6].

Начиная с конца двадцатого века появилось много публикаций на эту тему. Отметим среди них [7, 8]. Однако до сих пор, за исключением двух случаев, приведенных в[3] и [5] ($\omega(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$; $\omega(z) = \frac{1}{(1-dz)^2}$, $d \in D$), не известны экстремальные функции заданного линейного функционала над пространством Бергмана.

Сформулируем систему интегральных уравнений относительно неизвестных функций Φ, B, χ, позволяющую найти экстремальную функцию для l_ω с $\omega \in AC^1(\overline{D})$.

Теорема. *Для того чтобы f, $\|f\|_{A_1} = 1$, была экстремальной функцией для функционала l_ω, необходимо и достаточно, чтобы Φ, B, χ удовлетворяли следующей системе интегральных уравнений:*

$$\begin{cases} \overline{t\Phi(t)}\,\|l_\omega\| = \bar{t} \iint\limits_D \frac{\Phi(z)B(z)\bar{\omega}(z)d\sigma}{(1-\bar{t}z)^2} + \frac{1}{2} \iint\limits_D \frac{\Phi(z)B'(z)\bar{\omega}(z)d\sigma}{1-\bar{t}z}, \\ \|l_\omega\| \int\limits_T \frac{\overline{\Phi(\zeta)B(\zeta)}\,\overline{d\zeta}}{(1-\bar{t}\zeta)\Phi(\zeta)} = \iint\limits_D \overline{\omega(z)}\,\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}\,\frac{d\sigma}{(1-\bar{t}z)^2} + \\ + \frac{1}{2} \sum\limits_k \iint\limits_D \frac{(1-|a_k|^2)\overline{\omega(z)}\,d\sigma}{(1-\bar{a}_k z)(z-a_k)(1-\bar{t}z)} - \frac{1}{2} \sum\limits_k \frac{1}{1-a_k\bar{t}} \iint\limits_D \frac{\chi(z)d\sigma}{z-a_k} + \overline{\omega(t)}, \\ \int\limits_T \frac{\bar{\Phi}(\zeta)}{\Phi(\zeta)}\,\frac{\overline{d\zeta}}{1-\bar{t}\zeta}\|l_\omega\| = \iint\limits_D \frac{\bar{\omega}(z)B(z)d\sigma}{(1-\bar{t}z)^2} - \frac{1}{2} \iint\limits_D \frac{\bar{\omega}(z)B'(z)d\sigma}{1-\bar{t}z} - \iint\limits_D \frac{\bar{\omega}(z)B(z)}{1-\bar{t}z}\,\frac{\Phi'(z)d\sigma}{\Phi(z)}. \end{cases}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 15-01-00331.

На основании приведенного выше критерия были найдены общий вид экстремальных функций для l_ω с $\omega(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$, $n = 0, 1, \ldots,$ $(l_\omega(\varphi) = \sum_{k=0}^n c_k \frac{\varphi^{(k)}(0)}{(k+1)!})$ и для l_ω с $\omega(z) = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{(1-d_k z)^2}$, $c_k \in \mathbb{C}$, $d_k \in D$ $(l_\omega(\varphi) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi(d_k))$.

Литература

1. *Рябых В. Г.* Необходимое и достаточное условие существования линейного функционала над H_1 // Сиб. мат. журн.—2007.—Т. 48, № 6.—С. 1351–1360.
2. *Hayshi E.* The solution set of extremal problem in H_1 // Proc. Amer. Math. Soc.—1985.—Vol. 3, № 3.—P. 690–696.
3. *Пожарский Д. А., Рябых В. Г., Рябых Г. Ю.* Интегральные операторы в пространствах аналитических функций и близких к ним.—Ростов н/Д.: Изд. центр ДГТУ, 2011.—183 с.
4. *Рябых В. Г.* Некоторые экстремальные задачи в пространстве H_p' // Научные сообщения за 1964 г. Сер. точных и естеств. наук.—Ростов н/Д.: Изд-во РГУ, 1964.
5. *Рябых В. Г.* О некоторых свойствах аналитических функций класса H_p': дисс. …канд. физ.-мат. наук.—Ростов н/Д., 1966.
6. *Рябых В. Г.* Экстремальные задачи для суммируемых аналитических функций // Сиб. мат. журн.—1986.—Т. 27, № 3.—С. 212–217.
7. *Aharonov D., Beneteau C., Khavinson D. and Shapiro H.* Extremal problems for nonvanishing functions in Bergman spaces // Operator Theory: Adv. Appl.—2005.—Vol. 158.—P. 59–86.
8. *Ferguson T.* Extremal problems in Bergman spaces and extension of Ryabykh's theorem: A dissertation submitted in partial fulfilment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy (Mathematics).—Univ. of Michigan, 2011.

ПРОДОЛЖЕНИЕ АБСТРАКТНЫХ ОПЕРАТОРОВ УРЫСОНА

А. А. Гетоева
(Россия, Москва; МГУ)

Введение

Ортогонально аддитивные операторы в векторных решетках, введенные впервые в работе [1], являются объектом интенсивных исследований [2–7]. В данной заметке мы сформулируем один результат о продолжении ортогонально аддитивного отображения с латерального идеала на все пространство.

Предварительные сведения

Все необходимые сведения о векторных решетках можно найти в монографии [8]. Пусть E — векторная решетка и X — действительное векторное пространство. Отображение $T\colon E \to X$ называется *ортогонально аддитивным*, если $T(x+y) = T(x) + T(y)$ для любых дизъюнктных элементов $x, y \in E$.

Из определения ясно, что $T(0) = 0$. Множество всех ортогонально аддитивных операторов является действительным векторным пространством, относительно сложения операторов и умножения на скаляры.

Пусть теперь E и F — векторные решетки и $D \subset E$. Ортогонально аддитивный оператор $T\colon E \to F$ называется

• *положительным*, если $Tx \geqslant 0$ в F для любых $x \in E$;

• *порядково ограниченным на множестве* D, если T отображает порядково ограниченные подмножества D в порядково ограниченные множества в F.

Подмножество D векторной решетки E называется латеральным идеалом, если выполняются следующие условия:

• если $x \in D$, тогда $y \in D$ для любого $y \in \mathcal{F}_x$;

• если $x, y \in D$, $x \perp y$, тогда $x + y \in D$.

Результат

Следующая теорема показывает, что минимальное продолжение ортогонально аддитивного отображения сохраняет латеральную непрерывность.

Теорема 1. *Пусть E, F — порядково полные векторные решетки, D — латеральный идеал в E и $T : D \to F_+$ латерально непрерывное, ортогонально аддитивное, порядково ограниченное на D отображение. Тогда минимальное продолжение $\widetilde{T}$ также является латерально непрерывным.*

Литература

1. *Mazón J. M., Segura de León* S. Order bounded orthogonally additive operators // Rev. Roumaine Math. Pures Appl.—1990.—Vol. 35, № 4.—P. 329–353.
2. *Гетоева А. А., Плиев М. А., Попов М. М.* Продолжение абстрактных операторов Урысона.—(направлено в печать).
3. *Ben Amor M. A., Pliev M. A.* Laterally continuous part of an abstract Uryson operator // Int. J. Math. Anal.—2013.—Vol. 7, № 58.—P. 2853–2860.
4. *Getoeva A. A., Pliev M. A.* Domination problem for orthogonally additive operators in lattice-normed spaces // Int. J. Math. Anal.—2015.—Vol. 9, № 27.—P. 1341–1352.
5. *Gumenchuk A. V., Pliev M. A., Popov M. M.* Extensions of orthogonally additive operators // Mat. Stud.—2014.—Vol. 41, № 2.—P. 214–219.
6. *Pliev M. A., Popov M. M.* Narrow orthogonally additive operators // Positivity.—2014.—Vol. 18, № 4.—P. 641–667.
7. *Pliev M. A., Popov M. M.* Dominated Uryson operators // Int. J. Math. Anal.—2014.—Vol. 8, № 22.—P. 1051–1059.
8. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—623 с.

СУЩЕСТВОВАНИЕ БАЗИСА В ДОПОЛНЯЕМЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ ЯДЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ ФРЕШЕ ИЗ КЛАССОВ (d_1) И (d_2)

А. К. Дронов

(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Согласно гипотезе А. Пелчинского всякое дополняемое подпространство ядерного пространства Фреше с базисом также обладает базисом. Вопрос о справедливости гипотезы А. Пелчинского до сих пор остается открытым, хотя имеются положительные решения для различных частных случаев. Один из методов, который при этом использовался, был введен Б. С. Митягиным и опирался на интерполяционные свойства операторов, ограниченных на банаховых парах. Его использование, однако, вызывало необходимость накладывать существенные дополнительные ограничения. Один из способов их снять состоит в том, чтобы расширить постановку задачи теории интерполяции на случай, когда операторы ограничены не на банаховых парах, а на парах конусов, вложенных в банаховы пространства. При этом по аналогии с понятием интерполяционной тройки банаховых пространств (E_0, E_1, E) вводится понятие интерполяционной тройки конусов (Q_0, Q_1, Q). Данный подход позволяет распространить справедливость гипотезы А. Пелчинского на пространства из классов Драгилева (d_1) и (d_2).

Литература

1. *Каплицкий В. М., Дронов А. К.* К теории интерполяции операторов, ограниченных на конусах в весовых пространствах числовых последовательностей // Записки науч. семинаров ПОМИ.—2014.—Т. 424.—С. 154–178.
2. *Cerda J., Coll H.* Function cones and interpolation // Math. Nachr.—2005.—Vol. 278.—P. 227–239.
3. *Каплицкий В. М.* Интерполяция нелинейных операторов в весовых L_p-пространствах // Сиб. мат. журн.—2010.—Т. 51, № 2.—С. 316–329.

ЭРМИТОВЫ f-СТРУКТУРЫ НА СПЕЦИАЛЬНОЙ 5-МЕРНОЙ НИЛЬПОТЕНТНОЙ ГРУППЕ ЛИ

П. А. Дубовик

(Беларусь, Минск; БелГУ)

Известно, что f-структурой на многообразии M называется поле эндоморфизмов f, действующих в его касательном расслоении и удовлетворяющих условию $f^3 + f = 0$ [1]. Метрическая f-структура на римановых многообразиях (M, g) порождает пару взаимно дополнительных распределений $\operatorname{Im} f$ и $\operatorname{Ker} f$ на M. Ряд важнейших классов метрических f-структур может быть определен посредством композиционного тензора T вида [2]:

$$T(X, Y) = \frac{1}{4} f\bigl(\nabla_{fX}(f)fY - \nabla_{f^2X}(f)f^2Y\bigr),$$

где ∇ — связность Леви-Чивита метрики g, X и Y — гладкие векторные поля на M. Композиционный тензор T играет фундаментальную роль в геометрии метрических f-структур. Метрическая f-структура называется *эрмитовой f-структурой* (**Hf**-*структурой*: Hermitian f-structure), если $T(X, Y) = 0$ [2, 3]. Отметим, что метрические f-структуры — частный случай *обобщенной почти эрмитовой структуры* или GAH-структуры ранга r на (псевдо)римановом многообразии (M, g) [2].

Пусть G — группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ — левоинвариантная риманова метрика на G. Тогда связность Леви-Чивита ∇, на римановом многообразии $(G, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ определяется формулой [4]:

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}\,[X, Y] + U(X, Y),$$

где $U : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ — симметрическое билинейное отоброжение, определенное формулой

$$2\langle U(X, Y), Z\rangle = \langle X, [Z, Y]\rangle + \langle [Z, X], Y\rangle \quad \forall\, X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Рассмотрим группу Ли G с 5-мерной нильпотентной алгеброй Ли L_5^1, которая определяется следующими коммутационными соотношениями [5]:

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_4] = e_5.$$

Для стандартной евклидовой метрики вычислено действие отображения U на векторы алгебры Ли L_5^1:

$$2U(X, Y) = (x_2y_3 + x_3y_2 + x_4y_5 + x_5y_4)e_1 - (x_1y_3 + x_3y_1)e_2 - (x_1y_5 + x_5y_1)e_4,$$

где x_i, y_i — координаты векторов $X, Y \in L_5^1$ в базисе $e_1, \ldots, e_5$. Доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть левоинвариантная метрическая f-структура f на группе Ли G с алгеброй Ли L_5^1 удовлетворяет условию $e_1 \in \operatorname{Ker} f$. Тогда f-структура f является эрмитовой f-структурой.*

В качестве примера зададим на группе Ли G метрическую (относительно евклидовой метрики) f-структуру f со следующим действием на базисные векторы алгебры Ли L_5^1:

$$f(e_1) = 0,\ f(e_2) = -e_4,\ f(e_3) = e_5,\ f(e_4) = e_2,\ f(e_5) = -e_3.$$

Очевидно, f-структура f удовлетворяет всем требованиям теоремы 1, а значит, является эрмитовой f-структурой или f-структурой класса **Hf**.

Литература

1. *Yano K.* On a structure defined by a tensor field f of type $(1,1)$ satisfying $f^3 + f = 0$ // Tensor.—1963.—Vol. 14.—P. 99–109.
2. *Кириченко В. Ф.* Квазиоднородные многообразия и обобщенные почти эрмитовы структуры // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1983.—Т. 47, № 6.—С. 1208–1223.
3. *Балащенко В. В., Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В.* Однородные пространства: теория и приложения.—Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2008.—280 с.
4. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 2.—М.: Наука, 1981.
5. *Морозов В. В.* Классификация нильпотентных алгебр Ли шестого порядка // Изв. вузов. Математика.—1958.—№ 4.—С. 161–171.

О РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

С. Е. Жуковский

(Россия, Москва; РУДН)

Пусть X, Y — непустые множества, заданы два отображения $\psi, \varphi : X \to Y$. Точкой совпадения отображений ψ и φ называется решение $x \in X$ уравнения

$$\psi(x) = \varphi(x).$$

В работе [1] получены достаточные условия существования точек совпадения отображений ψ и φ в с X и Y являются метрическими пространствами. Основной результат в этой статье сформулирован в терминах накрывающих отображений.

В представленном исследовании понятие накрывающего отображения перенесено на частично упорядоченные пространства. Приведем соответствующее определение. Пусть $(X, \preceq)$, $(Y, \preceq)$ — частично упорядоченные пространства. Для $x \in X$ положим

$$O_X(x) = \{\, \xi \in X : \xi \preceq x \,\}.$$

Определение 1. Отображение $\psi : X \to Y$ будем называть *упорядоченно накрывающим*, если для любого $u \in X$ имеет место включение

$$O_Y\big(\psi(u)\big) \subset \psi\big(O_X(u)\big).$$

Сформулируем теперь теорему о точках совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах. Пусть задано множество $U \subset X$. Через $\mathcal{S}(\psi, \varphi, U)$ обозначим множество всех цепей $S \subset U$ таких, что

$$\psi(x) \succeq \varphi(x)\ \forall\, x \in S, \quad \psi(x_1) \preceq \varphi(x_2)\ \forall\, x_1,\, x_2 \in S : x_1 \prec x_2.$$

Теорема 1 [2]. *Пусть существует элемент $x_0 \in X$ такой, что $\psi(x_0) \succeq \varphi(x_0)$; отображение φ монотонно; отображение ψ является упорядоченно накрывающим; для произвольной цепи $S \in \mathcal{S}(\psi, \varphi, U)$ существует нижняя граница $u \in X$ цепи S такая, что $\psi(u) \succeq \varphi(u)$.*

Тогда существует $\xi \in O_X(x_0)$ такая, что $\psi(\xi) = \varphi(\xi)$. Кроме того, во множестве $\{\xi \in O_X(x_0) : \psi(\xi) = \varphi(\xi)\}$ существует минимальный элемент.

Известная теорема Кнастера — Тарского (см., например, [3]) о неподвижной точке монотонного отображения $\varphi : X \to X$ вытекает из теоремы 1. Более подробго результаты исследования задачи представлены в [2].

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ, проект № МК-5333.2015.1.

Литература

1. *Арутюнов А. В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Докл. АН.—2007.—Т. 416, № 2.—С. 151–155.
2. *Arutyunov A. V., Zhukovskiy E. S., Zhukovskiy S. E.* Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology Appl.—2015.—Vol. 179.—P. 13–33.
3. *Granas A., Dugundji D.* Fixed Point Theory.—N. Y.: Springer–Verlag, 2003.

ОБ ОЦЕНКАХ СНИЗУ ДЛЯ МАКСИМАЛЬНОГО ЧИСЛА КОМПОНЕНТ ДОПОЛНЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО СПЕКТРА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ТЁПЛИЦЕВЫХ МАТРИЦ С СИМВОЛОМ ЗАДАННОЙ СТЕПЕНИ

С. А. Золотых

(Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ)

Пусть f — комплекснозначная функция, аналитическая в окрестности окружности единичного радиуса $S^1 = \{z \in C : |z| = 1\}$:

$$f(z) = \sum_{k \in Z} a_k z^k.$$

Будем обозначать через $T_n(f)$ тёплицеву матрицу размера $n \times n$, т. е. матрицу $T_n(f) = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$, матричные элементы которой задаются формулой $a_{i,j} = a_{i-j}$. Для $k < -r$ и для $k > h$, $a_k = 0$, т. е. аналитическая функция $f(z)$ превращается в лорановский полином

$$f(z) = \sum_{k=-r}^{h} a_k z^k,$$

то соответствующая такой функции тёплицева матрица называется ленточной.

Упорядочим каким-нибудь образом собственные значения $\{\lambda_{n,i}\}_{i=0}^{n-1}$ матрицы $T_n(f)$. Пусть $\sigma_n = \sigma(T_n(f)) = \{\lambda_{n,0}, \ldots, \lambda_{n,n}\}$ — спектр матрицы $T_n(f)$. Множество предельных точек последовательностей $\{\lambda_k\}$, где $\lambda_k \in \sigma_{i_k}$, $\lim_{k\to\infty} i_k = \infty$, будем называть предельным спектром последовательности тёплицевых матриц $\{T_n(f)\}_{n=1}^\infty$ и обозначать через $\sigma_l(f)$.

Рассмотрим многочлен

$$b(t) = \mu + t^{-k}(t-\alpha)^k(t-\beta)^k,$$

где μ, α, β являются комплексными числами, и $\alpha \cdot \beta \neq 0$.

Теорема. 1. *Если $k = 1$ или $k = 2$, тогда $C \setminus \sigma_l(b)$ связен.*

2. *Если $k \geqslant 3$, тогда $C \setminus \sigma_l(b)$ имеет по меньшей мере $\left[\frac{k+1}{2}\right]$ компонент (включая неограниченную компоненту).*

3. *Для каждого натурального числа j между 1 и $\left[\frac{k+1}{2}\right]$ существуют такие α, β, что $C \setminus \sigma_l(b)$ имеет ровно j компонент. Именно α, β находятся из уравнений*

$$\begin{cases} -(\alpha+\beta) + 2\sqrt{\alpha \cdot \beta} = f_1, \\ -(\alpha+\beta) - 2\sqrt{\alpha \cdot \beta} = f_2. \end{cases}$$

При этом f_1, f_2 следует выбирать так, чтобы разность значений их аргументов удовлетворяла следующему условию:

$$\frac{\pi(r-1)}{k} < \left|\arg(f_1) - \arg(f_2)\right| < \frac{\pi r}{k}, \quad r = 1, \ldots, k.$$

В этом случае число компонент связности дополнения предельного спектра будет равняться $[\frac{r+1}{2}]$.

Литература

1. *Bottcher A. C., Grudsky S. M.* Spectral Properties of Banded Teoplitz Matrices.—SIAM, 2005.—422 p.
2. *Schmidt P., Spitzer F.* The Teoplitz matrices of an arbitrary Laurent polynomial // Math. Scand.—1960.— Vol. 8.—P. 15–38.
3. *Золотых С. А., Стукопин В. А.* О вычислении предельного спектра ленточных тёплицевых матриц // Мат. форум. Т. 7. Исследования по мат. анализу.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2013.—С. 80–87.—(Итоги науки. Юг России).

ОБ ОРБИТАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ОПЕРАТОРА ТИПА ПОММЬЕ

Иванова О. А. (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
Мелихов С. Н. (Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ)

В докладе идет речь о коммутантах и циклических элементах оператора типа Поммье D_{0,g_0}, действующего или в весовом (LF)-пространстве E целых (в $\mathbb{C}$) функций, или в пространстве Фреше $A(\Omega)$ функций, аналитических в односвязной области Ω, содержащей 0. При этом

$$D_{0,g_0}(f)(t) := \begin{cases} \dfrac{f(t) - g_0(t)f(0)}{t}, & t \neq 0, \\ f'(0) - g_0'(0)f(0), & t = 0, \end{cases}$$

где функция g_0 такова, что $g_0(0) = 1$ (соответственно, $g_0 \in E$ или $g_0 \in A(\Omega)$). Веса, задающие пространство E, удовлетворяют стандартным техническим условиям.

Приведем некоторые результаты. Пусть F — одно из пространств E или $A(\Omega)$; $\mathcal{K}(D_{0,g_0})$ — пространство всех линейных непрерывных операторов B в F таких, что $BD_{0,g_0} = D_{0,g_0}B$ в F; $\mathcal{P}(D_{0,g_0})$ — пространство многочленов от оператора D_{0,g_0}; $\mathcal{L}(F)$ — пространство всех линейных непрерывных в E операторов.

Теорема 1. *В $\mathcal{L}(E)$ и в $\mathcal{L}(A(\Omega))$ с топологией предкомпактной сходимости $\mathcal{K}(D_{0,g_0})$ совпадает с замыканием $\mathcal{P}(D_{0,g_0})$.*

Теорема 2. *Пусть Ω — односвязная область в $\mathbb{C}$, содержащая 0. Следующие утверждения равносильны:*

(i) Система $\{D_{0,g_0}^n(f) : n \geqslant 0\}$ (орбита f) неполна в $A(\Omega)$ (т. е. f не является циклическим элементом оператора D_{0,g_0} в $A(\Omega)$).

(ii) Функции f и g_0 имеют общие нули в Ω или существует рациональная функция R такая, что $f = Rg_0$.

Ранее аналоги теоремы 1 (о представлении в $\mathcal{L}(A(\Omega))$ коммутантов оператора D_{0,g_0} при $g_0 \equiv 1$ в виде D_{0,g_0}-операторов бесконечного порядка, т. е. рядами вида $\sum_{n=0}^{\infty} c_n D_{0,g_0}^n$) были доказаны в случае, когда Ω – круг $|t| < R$ (Н. Е. Линчук, Н. И. Нагнибида). Теорема 2 была доказана прежде Ю. С. Линчуком при предположении, что функция g_0 не обращается в 0 в Ω.

ЕЩЕ ОДИН ВАРИАНТ ТЕОРЕМЫ КЕЛЛОГА

С. Б. Климентов

(Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ)

Если в комплексной z-плоскости простая замкнутая кривая L есть регулярный гомеоморфный образ окружности Γ_t: $L = \{z : z = z(t) \equiv z(s) = x(s)+iy(s)\}$, $t = e^{is}$, $z'(s) \neq 0$, $z(t) \in C^k_\alpha(\Gamma_t)$, $k \geqslant 1$, то будем говорить, что кривая L принадлежит классу C^k_α и писать $L \in C^k_\alpha$.

Обозначим $W_p^{k-\frac{1}{p}}(\Gamma)$ множество граничных значений (следов) функций из класса $W^k_p(\overline{D})$. Если простая замкнутая кривая L есть регулярный гомеоморфный образ окружности Γ_t, получаемый как граничные значения функции класса $W^k_p(\overline{D})$, $k \geqslant 2$, $p > 2$, то будем говорить, что кривая L принадлежит классу $W_p^{k-\frac{1}{p}}$ и писать $L \in W_p^{k-\frac{1}{p}}$.

Пусть область G ограничена кривой $L \in C^k_\alpha\big(W_p^{k-\frac{1}{p}}\big)$, тогда будем писать $G \in C^k_\alpha\big(W_p^{k-\frac{1}{p}}\big)$, и говорить, что область G принадлежит соответствующему классу.

В комплексных плоскостях переменной z и переменной w рассмотрим две ограниченные замкнутые односвязные области D_z и G_w с границами Γ и L соответственно, класса C^{k+1}_α, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $0 < \alpha < 1$, либо класса $W_p^{k+1-\frac{1}{p}}$, $k = 1, 2, \ldots$, $p > 2$. Далее обозначаем $\overline{D}_z = D_z \cup \Gamma$, $\overline{G}_w = G_w \cup L$. Хорошо известно следующее утверждение (теорема Келлога) [1–2].

Теорема 1. *Если $\Phi = \Phi(z)$ — однолистное конформное отображение области $D_z \in C^{k+1}_\alpha$ на область $G_w \in C^{k+1}_\alpha$, то $\Phi(z)$ продолжается до гомеоморфизма $\overline{D}_z$ на $\overline{G}_w$, причем $\Phi(z) \in C^{k+1}_\alpha(\overline{D}_z)$, а обратное отображение принадлежит классу $C^{k+1}_\alpha(\overline{G}_w)$.*

Основная цель предлагаемой работы — доказательство следующего аналога теоремы 1.

Теорема 2. *Если $\Phi = \Phi(z)$ — однолистное конформное отображение области $D_z \in W_p^{k+1-\frac{1}{p}}$, $k \geqslant 1$, $p > 2$, на область $G_w \in W_p^{k+1-\frac{1}{p}}$, то $\Phi(z)$ продолжается до гомеоморфизма $\overline{D}_z$ на $\overline{G}_w$, причем $\Phi(z) \in W^{k+1}_p(\overline{D}_z)$, а обратное отображение принадлежит классу $W^{k+1}_p(\overline{G}_w)$.*

В настоящей работе установлено, что если теорема 1 справедлива при $k = 1$, то теорема 2 эквивалентна следующему утверждению о регулярности квазиконформного гомеоморфизма единичного круга $\overline{D}_z = \{z : |z| \leqslant 1\}$ при регулярной комплексной характеристике, аналогичному теореме 2 из [3].

Рассмотрим в круге D_z уравнение Бельтрами

$$\partial_{\bar z} w - q(z)\partial_z w = 0, \quad |q(z)| \leqslant q_0 = \text{const} < 1, \tag{1}$$

$q(z) \in W_p^k(\overline{D}_z)$, $k = 1, 2, \ldots$, $p > 2$; $\partial_{\bar z} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$, $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$ — производные в смысле Соболева.

Теорема 3. *Если $w = w(z)$ — решение уравнения* (1), *гомеоморфно отображающее круг $\overline{D}_z = \{z : |z| \leqslant 1\}$ на круг $\overline{D}_w = \{w : |w| \leqslant 1\}$, то $w(z) \in W_p^{k+1}(\overline{D}_z)$, а обратное отображение принадлежит классу $W_p^{k+1}(\overline{D}_w)$.*

Замечание. Доказательство аналогичного свойства гомеоморфизмов уравнения Бельтрами в [3] для $q(z) \in C_\alpha^k(\overline{D}_z)$, $k \geqslant 0$, $0 < \alpha < 1$, не опирается на теорему Келлога (ссылку на теорему Келлога в доказательстве теоремы 2 из [3] можно заменить ссылкой на принцип симметрии конформных отображений). В связи с этим приведенная в доказательстве теоремы 2 схема рассуждений дает новый способ перехода в доказательстве теоремы 1 от случая $k = 1$ к случаю произвольного $k \geqslant 2$.

Литература

1. *Kellog O. D.* Potential functions on the boundary on their regions of definition // Trans. Amer. Math. Soc.—1908.—Vol. 9, № 1.—P. 39–50.—URL: http://www.ams.org/journals/tran/1908-009-01/home.html.
2. *Kellog O. D.* Harmonic functions and Green's integral // Trans. Amer. Math. Soc.—1912.—Vol. 13, № 1.—P. 109–132.—URL: http://www.ams.org/journals/tran/1912-013-01/home.html.
3. *Климентов С. Б.* Представления «второго рода» для классов Харди решений уравнения Бельтрами // Сиб. мат. журн.—2014.—Т. 55, № 2.—С. 324–340.

ГЕОМЕТРИЯ КАСАТЕЛЬНОГО КОНУСА К G-ПРОСТРАНСТВУ НЕПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ[1]

М. А. Колчар
(Россия, Архангельск; САФУ)

В работе П. Д. Андреева [1] вводится понятие касательного конуса к G-пространству Буземана неположительной кривизны. Оно играет ключевую роль в доказательстве в указанном классе пространств известной гипотезы Буземана, утверждающей, что всякое G-пространство является топологическим многообразием. Оказывается, что касательный конус обладает дополнительной структурой.

Теорема 1. *Пусть X — G-пространство Буземана неположительной кривизны, K_pX — его касательный конус в точке p. Тогда K_pX изометричен строго выпуклому нормированному пространству.*

Из этой теоремы следует, что всякое G-пространство Буземана неположительной кривизны можно рассматривать как «слабо финслерово пространство».

Под слабо финслеровым пространством мы здесь понимаем геодезическое пространство X, являющееся топологическим многообразием, в каждой точке p которого определено касательное пространство K_pX, оснащенное строго выпуклой нормой. Кроме того, в каждой точке определено экспоненциальное отображение $\exp:\ K_pX \to X$, аналогичное экспоненциальному отображению финслеровых многообразий. В односвязном случае оно является гомеоморфизмом. Все указанные экспоненциальные отображения в разных точках непрерывно согласованы. Таким образом допустимы задачи, характерные для финслеровой геометрии, например такие, как задача преследования. Понятно, что класс гладкости таких слабо финслеровых пространств в общем случае повысить нельзя.

Литература

1. *Андреев П. Д.* Доказательство гипотезы Буземана для G-пространств неположительной кривизны // Алгебра и анализ.—2014—Т. 26, № 2.—С. 1–20.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 14-01-00219 А.

ПРОЕКТИВНЫЕ ОПИСАНИЯ ВЕСОВЫХ (LF)-ПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА КОНУСАХ

Е. В. Комарчук

(Россия, Азов; АТИ ДГТУ)

В докладе идет речь о проблеме проективного описания счетных индуктивных пределов весовых пространств непрерывных функций на конусах, задаваемых положительно однородными весами.

Пусть Y — нормированное (комплексное или вещественное) линейное пространство с нормой $\|\cdot\|$; X — конус в Y. Предположим, что X с индуцированной из Y топологией локально компактно.

Пусть $h_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, — непрерывные положительно однородные степени $\rho > 0$ функции такие, что $h_n \leqslant h_{n+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Далее $\omega : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ — непрерывная функция, для которой $\lim_{t\to+\infty} \omega(t) = +\infty$ и $\lim_{t\to+\infty} \omega(t)/t^\rho = 0$. Положим $\omega(x) := \omega(\|x\|)$, $x \in X$. Определим весовые функции

$$w_{nk}(x) := \exp(-h_n(x) + k\omega(x)), \quad x \in X,\ n, k \in \mathbb{N},$$

и введем весовые банаховы пространства непрерывных функций

$$C(w_{nk}, X) := \Big\{ f \in C(X) \Big|\ \|f\|_{nk} := \sup_{x\in X} |f(x)| w_{nk}(x) < +\infty \Big\}, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Положим $WC(X) := \mathrm{ind}_n \mathrm{proj}_k C(w_{nk}, X)$.

Ассоциированное с $(w_{nk})_{n,k\in\mathbb{N}}$ семейство весов $\overline{W}$ состоит из всех полунепрерывных сверху функций $\overline{w} : X \to [0, +\infty)$ таких, что для любого n существуют $\alpha_n > 0$ и $k = k(n)$, для которых $\overline{w} \leqslant \alpha_n w_{nk}$ на X. Проективная оболочка индуктивного предела $WC(X)$ определяется следующим образом:

$$C\overline{W}(X) := \Big\{ f \in C(X) \Big|\ \|f\|_{\overline{w}} := \sup_{x\in X} |f(x)| \overline{w}(x) < +\infty,\ \forall\, \overline{w} \in \overline{W} \Big\}.$$

Топология $C\overline{W}(X)$ задается семейством преднорм $\|\cdot\|_{\overline{w}}$, $\overline{w} \in \overline{W}$. ($LF$)-пространство $WC(X)$ непрерывно вложено в $C\overline{W}(X)$.

Теорема. 1) *$WC(X)$ является топологическим подпространством $C\overline{W}(X)$.*

2) *Алгебраическое равенство $WC(X) = C\overline{W}(X)$ выполняется тогда и только тогда, когда $\forall\, n\ \exists\, m\ \forall\, \mu\ \exists\, C > 0$:*

$$h_\mu(x) - h_m(x) \leqslant C(h_m(x) - h_n(x)), \quad x \in X.$$

Проблема топологического и алгебраического проективных описаний решена также и для (LF)-пространства $CW(X)$ непрерывных функций на X, задаваемого семейством весов

$$w_{nk}(x) := \exp\left(-h_n(v(x)) - \left(\alpha + \frac{1}{k} \right) \omega(x) \right), \quad x \in X,\ n, k \in \mathbb{N},$$

где $\alpha \geqslant 0$; $h_n : \Gamma \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, — положительно однородные степени $\rho > 0$ функции; Γ — конус в нормированном линейном пространстве Z, а $v : X \to \Gamma$ — непрерывная функция с некоторым «накрывающим» свойством.

A DECOMPOSITION THEOREM[1]

Z. A. Kusraeva

(Russia, Vladikavkaz; SMI)

The purpose of this work is to show that the Decomposition Theorem which is established for vector lattices (by S. S. Kutateladze in [1]) holds also in a case of arbitrary ordered spaces.

An operator $P : X \to Y \cup \{+\infty\}$ is called *sublinear* if $P(0) = 0$, $P(x + y) \leqslant P(x)+P(y)$ and $P(\lambda x) = \lambda P(x)$ for all $x, y \in X$ and $0 \leqslant \lambda \in \mathbb{R}$ (with the convention $+\infty + y = y + \infty = +\infty$ and $\lambda(+\infty) = +\infty$ $(y \in Y,\ \lambda \in \mathbb{R}_+)$.

Define $\operatorname{dom} P := \{x \in X : P(x) < +\infty\}$. The collection of all linear operators from X into Y dominated by P is called the *support set* of P and denoted by ∂P; symbolically,

$$\partial P := \big\{T \in L(X, Y) : Tx \leqslant P(x),\ \forall\, x \in X\big\},$$

where $L(X, Y)$ is the space of all linear operators from X to Y.

A *positive decomposition* of an operator T is an N-tuple $(T_1, \dots, T_N)$ with $N \in \mathbb{N}$, $T_k \geqslant 0$ $(k := 1, \dots, N)$, and $T = T_1 + \ldots + T_N$.

For an increasing sublinear operator $P : X \to Y \cup \{+\infty\}$ define the operator $P^{\curlywedge} : X^N \to Y \cup \{+\infty\}$ as

$$P^{\curlywedge}(x_1, \dots, x_N) = \inf\big\{P(x) : x_1, \dots, x_N \leqslant x\big\}.$$

For the necessary information see [2].

Decomposition Theorem. *Assume that $H_1, \dots, H_N$ are cones in an ordered vector space X. Assume further that P and Q are increasing sublinear operators from X to $Y \cup \{+\infty\}$ and $H_1 \times \dots \times H_N + \Delta_N(\mathrm{dom}(P)) - X_+^N$ is a subspaces in X^N. The inequality*

$$P^{\curlywedge}(h_1, \dots, h_N) \geqslant Q^{\curlywedge}(h_1, \dots, h_N)$$

holds for all $(h_1, \dots, h_N) \in H_1 \times \dots \times H_N$ if and only if to each positive decomposition $(T_1, \dots, T_N)$ of any $T \in \partial Q$ there is a positive decomposition $(S_1, \dots, S_N)$ of some $S \in \partial P$ such that

$$S_k(h_k) \geqslant T_k(h_k) \quad (h_k \in H_k;\ k := 1, \dots, N).$$

This result is very important in convex analysis.

References

1. *Kutateladze S. S.* Choquet boundaries in K-spaces // Russ. Math. Surv.—1975.—Vol. 30, № 4.—P. 115–155.
2. *Kusraev A. G., Kutateladze S. S.* Subdifferentials: Theory and Applications.—Dordrecht: Kluwer, 1995.—398 p.

[1]Supported from Russian Foundation for Basic Research, project № 14-01-91339.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тезисы докладов XII Международной научной конференции (с. Цей, 12–18 июля 2015 г.)

О КОНСТРУКЦИИ КВАЗИЭКВИВАЛЕНТНОСТИ В ОДНОЙ АБСТРАКТНОЙ ВЕРСИИ ЛОКАЛЬНОГО МЕТОДА

А. В. Лукин

(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

В [1] при помощи модификации локальной структуры Симоненко — Козака [2] получен критерий применимости проекционного метода для сверток с компактными коэффициентами. Для его построения потребовалось исследовать конструкцию квазиэквивалентности, порожденной индуцированной на подалгебры локальной структурой.

Пусть $\mathcal{A}$ — банахова алгебра с единицей e, X — компакт, а Σ_X — борелевская σ-алгебра подмножеств пространства X, $p : \Sigma_X \to \mathcal{A}$ — локальная структура над X (определение см. в [2]). Пусть $\widetilde{X}(\subset X)$ — компакт, $\widetilde{\mathcal{A}}$ — банахова подалгебра алгебры $\mathcal{A}$ с единицей $\tilde{e}$. Если $p(\Sigma_{\widetilde{X}}) \subset \widetilde{\mathcal{A}}$ и $p(\widetilde{X}) = \tilde{e}$, то будем говорить, что отображение $\tilde{p} = p|_{\Sigma_{\widetilde{X}}} : \Sigma_{\widetilde{X}} \to \widetilde{\mathcal{A}}$ *индуцирует* в $\widetilde{\mathcal{A}}$ локальную структуру на $\widetilde{X}$. Элементы $a, b \in \mathcal{A}$ называются *эквивалентными в точке* $x \in X$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует окрестность u точки x такая, что $\|(a-b)p(u)\| < \varepsilon$, $\|p(u)(a-b)\| < \varepsilon$. Сокращенно будем писать $a \sim_x b$.

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — банаховы алгебры с локальными структурами над пространствами X и Y, порожденными отображениями $p : \Sigma_X \to \mathcal{A}$ и $p' : \Sigma_Y \to \mathcal{B}$; $a \in \mathcal{A}$ и $b \in \mathcal{B}$ — элементы этих алгебр, $x \in X$ и $y \in Y$ — фиксированные точки. Пусть существуют окрестности u и v точек x и y, гомеоморфизм $\varphi : u \to v$ и изоморфизм $T : p(u)\mathcal{A}p(u) \to p'(v)\mathcal{B}p'(v)$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $\varphi(x) = y$;
2) $\forall\, w \in \Sigma_u\ T(p(w)) = p'(\varphi(w))$;
3) $T(p(u)ap(u)) \sim_y p'(v)bp'(v)$.

Тогда говорят, что элемент a в точке x *квазиэквивалентен* элементу b в точке y. Сокращенно будем писать $a \sim_x \varphi, T \sim_y b$ или $a \sim_x \sim_y b$.

Теорема 1. *Пусть $a \sim_x \varphi, T \sim_y b$; $\widetilde{X}(\subset X)$ и $\widetilde{Y}(\subset Y)$ — компакты такие, что $x \in \widetilde{X}$, $y \in \widetilde{Y}$; $\widetilde{\mathcal{A}}$ и $\widetilde{\mathcal{B}}$ — банаховы подалгебры алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ с единицами $\tilde{e} \in \widetilde{\mathcal{A}}$ и $\tilde{e}' \in \widetilde{\mathcal{B}}$ такие, что $a \in \widetilde{\mathcal{A}}$, $b \in \widetilde{\mathcal{B}}$, с индуцированными локальными структурами $\tilde{p}$ и $\tilde{p}'$ на компактах $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$. Пусть существуют окрестности $\widetilde{u}(\subset u \cap \widetilde{X})$ в $\widetilde{X}$ и $\widetilde{v}(\subset v \cap \widetilde{Y})$ в $\widetilde{Y}$ точек x и y соответственно, такие, что $\varphi(\widetilde{u}) = \widetilde{v}$ и $T(\tilde{p}(\widetilde{u})\widetilde{\mathcal{A}}\tilde{p}(\widetilde{u})) = \tilde{p}'(\widetilde{v})\widetilde{\mathcal{B}}\tilde{p}'(\widetilde{v})$; Φ и Ψ — банаховы алгебры с единицами e_Φ и e_Ψ, для которых имеются непрерывные изоморфизмы $\kappa : \widetilde{\mathcal{A}} \to \Phi$ и $\psi : \widetilde{\mathcal{B}} \to \Psi$, сохраняющие единицу. Тогда*

1) отображения $q = \kappa\tilde{p} : \Sigma_{\widetilde{X}} \to \Phi$ и $q' = \psi\tilde{p}' : \Sigma_{\widetilde{Y}} \to \Psi$ определяют локальные структуры в Φ и Ψ;

2) существует изоморфизм $T' : q(\widetilde{u})\Phi q(\widetilde{u}) \to q'(\widetilde{v})\Psi q'(\widetilde{v})$ такой, что $\kappa(a) \sim_x \widetilde{\varphi}, T' \sim_y \psi(b)$.

Через $\mathcal{V}_p(= \mathcal{V}_p(\mathbb{R}^k))$, где $p > 1$, $k \geqslant 2$, обозначим замкнутую подалгебру $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^k))$, порожденную операторами многомерной свертки с ядром из $L_1(\mathbb{R}^k)$.

Пусть $\mathfrak{X}$ — хаусдорфов компакт с мерой, $\mathcal{K}_p$ — идеал компактных операторов в $\mathcal{L}(L_p(\mathfrak{X}))$, $\mathcal{V}_p^{\mathcal{K}_p} = \mathcal{V}_p \otimes \mathcal{K}_p$, M — замкнутое ограниченное множество в $\mathbb{R}^k$, удовлетворяющее определенным условиям гладкости, K_x — конус с вершиной в x. Пусть Q^m — проектор на первые m элементов базиса в $L_p(\mathfrak{X})$, P_M — проектор на множество M. Через $\mathfrak{A}_X$ обозначим множество семейств $\{A_m\}_{m\geqslant 1}$ линейных ограниченных операторов $A_m : (P_{mX} \otimes Q^m)L_p(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{X}) \to (P_{mX} \otimes Q^m)L_p(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{X})$ таких, что $\sup_{m\geqslant 1} \|A_m\| < \infty$; через $\mathfrak{J}_X = \{\{A_m\}_{m\geqslant 1} \in \mathfrak{A}_X\colon \lim_{m\to\infty} \|A_m\| = 0\}$ обозначим замкнутый двухсторонний идеал в $\mathfrak{A}_X$. Класс смежности элемента $\{A_m\}_{m\geqslant 1}(\in \mathfrak{A}_X)$ по идеалу $\mathfrak{J}_X$, являющийся элементом фактор-алгебры $\mathfrak{A}_X/\mathfrak{J}_X$, обозначим через $[\{A_m\}_{m\geqslant 1}]_{\mathfrak{J}_X}$.

Теорема 2. *Пусть* $A \in \left(\mathcal{V}_p^{\mathcal{K}_p}\right)^+$, *тогда для любого* $x \in \partial M$ *имеет место квазиэквивалентность*

$$\left[\{(P_{mM}\otimes Q^m)A(P_{mM}\otimes Q^m)\}_{m\geqslant 1}\right]_{\mathfrak{J}_M} \sim_x\sim_x \left[\{(P_{mK_x}\otimes Q^m)A(P_{mK_x}\otimes Q^m)\}_{m\geqslant 1}\right]_{\mathfrak{J}_{K_x}}.$$

Литература

1. *Лукин А. В.* О применении локального метода Симоненко — Козака в теории проекционных методов решения уравнений свертки с операторными коэффициентами // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения-V: Тез. докл. междунар. конф.—Ростов н/Д.: изд. центр ДГТУ, 2015.—С. 44–45.
2. *Козак А. В.* Локальный принцип в теории проекционных методов // Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения.—Элиста, 1983.—С. 58–73.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ СУММАМИ ФУРЬЕ — ХААРА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

М. Г. Магомед-Касумов

(Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Для построения ряда Фурье — Хаара $\sum_{k=1}^{\infty} c_k\chi_k(x)$, $c_k=\int_0^1 f(t)\chi_k(t)\,dt$, для функции $f(x)$ требуется, чтобы эта функция была суммируемой. В связи с этим при исследовании некоторых вопросов теории приближений суммами Фурье — Хаара в весовых пространствах Лебега с переменным показателем возникает необходимость наложения на вес условий, при которых будет выполнено вложение

$$L_w^{p(x)}(E)\subset L^1(E). \tag{1}$$

В данной работе исследуются условия на вес $w(x)$, при которых будет справедливо указанное вложение.

Введем некоторые определения. Пусть $w(x)$ — неотрицательная почти всюду (п. в.) положительная суммируемая функция (вес), определенная на множестве $E=[0,1]$. Весовым пространством Лебега с переменным показателем $L_w^{p(x)}(E)$ называется множество измеримых на E функций $f(x)$, удовлетворяющих условию $\int_E |f(x)|^{p(x)}w(x)\,dx<\infty$. Как известно [1–3], если

$$1\leqslant \operatorname*{ess\,inf}_{x\in E} p(x)\leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{x\in E} p(x)<\infty, \tag{2}$$

то топология пространства $L_w^{p(x)}(E)$ нормируема и одну из эквивалентных норм можно определить, полагая для $f\in L_w^{p(x)}(E)$

$$\|f\|_{p(\cdot),w}(E)=\inf\left\{\alpha>0:\int\limits_E \left|\frac{f(x)}{\alpha}\right|^{p(x)} w(x)\,dx\leqslant 1\right\}.$$

Символом $\mathcal{P}(E)$ будем обозначать множество измеримых на множестве E функций $p(x)$, удовлетворяющих условию (2). Нам также понадобится обозначение $\widehat{\mathcal{P}}(E)$ для подмножества из $\mathcal{P}(E)$, включающего только те $p(x)$, которые удовлетворяют дополнительному ограничению $1<\operatorname{ess\,inf}_{x\in E} p(x)$.

Множество весовых функций $w(x)$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} &\text{(H1)}\quad w(x)\geqslant c(w)>0,\quad x\in E_1=\{x\in E: p(x)=1\}\ (\text{п. в.}),\\ &\text{(H2)}\quad \left\|w^{-\frac{1}{p(\cdot)}}\right\|_{p'(\cdot)}(E_2)<\infty,\quad E_2=E\setminus E_1, \end{aligned}$$

будем обозначать через $\mathcal{H}_{p(\cdot)}(E)$.

Следующая теорема дает достаточные условия для справедливости соотношения (1).

Теорема 1. *Если* $w(x) \in \mathcal{H}_{p(\cdot)}(E)$, $p(x) \in \mathcal{P}(E)$, *то имеет место вложение* (1), *причем*

$$\|f\|_1(E) \leqslant c(p,w)\|f\|_{p(\cdot),w}(E).$$

На вопрос о том, насколько условия (H1) и (H2) являются необходимыми, в некоторой степени отвечают приведенные ниже утверждения.

Теорема 2. *Пусть* $p(x) \in \mathcal{P}(E)$ *и имеет место* (1). *Тогда вес* $w(x)$ *будет удовлетворять условию* (H1).

Теорема 3. *Пусть* $p(x) \in \widehat{\mathcal{P}}(E)$. *Для того чтобы имело место вложение* (1), *необходимо, чтобы* $w(x)^{\alpha(x)} \in L^1(E)$ *для любой измеримой функции* $\alpha(x)$, *которая при некотором* $\varepsilon > 0$ *удовлетворяет условию*

$$-\frac{1}{p(x)-1} + \varepsilon \leqslant \alpha(x) \leqslant 1, \quad x \in E. \tag{3}$$

О том, как связаны классы $\mathcal{H}_{p(\cdot)}(E)$ при различных показателях $p(x)$, показано в следующей теореме.

Теорема 4. *Если* $1 \leqslant p(x) \leqslant q(x) \leqslant \overline{q}(E) < \infty$, *то* $\mathcal{H}_{p(\cdot)}(E) \subset \mathcal{H}_{q(\cdot)}(E)$.

Литература

1. *Шарапудинов И. И.* О топологии пространства $L^{p(t)}([0,1])$ // Мат. заметки.—1979.—Т. 26, № 4.—С. 613–632.
2. *Diening L., Harjulehto P., Hasto P., Ruzicka M.* Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents.—Springer, 2011.—509 p.—DOI 10.1007/978-3-642-18363-8.
3. *Cruz-Uribe D., Fiorenza A.* Variable Lebesgue Spaces: Foundations and Harmonic Analysis.—Springer, 2013.—312 p.—DOI 10.1007/978-3-0348-0548-3.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тезисы докладов XII Международной научной конференции (с. Цей, 12–18 июля 2015 г.)

PROPERTIES OF SEMI-ORTHOGONAL PROJECTIONS

M. S. Matvejchuk
(Russia, Kazan; KFU)

Introduction. Many papers are devoted to quantum logic. A *quantum logic* [1] is a set L endowed with a partial order $\leqslant$ and unary operation $^{\perp}$ such that the following conditions are satisfied:

(i) L possesses a least and a greatest element, 0 and I, and $0 \neq I$;

(ii) $a \leqslant b$ implies $b^{\perp} \leqslant a^{\perp}$ for any a, $b \in L$;

(iii) $(a^{\perp})^{\perp} = a$ for any $a \in L$;

(iv) if $\{a_i\}_{i \in X}$ is a finite subset of L such that $a_i \leqslant a_j^{\perp}$ for $i \neq j$, then supremum $\vee_{i \in X} a_i$ exists in L;

(v) if a, $b \in L$ and $a \leqslant b$, then $b = a \vee (b \wedge a^{\perp})$.

Sometimes replaced axioms (iv), (v) on:

(iv') if $a \leqslant b^{\perp}$ then there exist $a \vee b$;

(v') if a, $b \in L$ and $a \leqslant b$, then there exist $c \leqslant a^{\perp}$ such that $b = a \vee c$.

Two elements a, $b \in L$ are called orthogonal if $a \leqslant b^{\perp}$. We will denote the orthogonality of a, b by the symbol $a \perp b$.

An important interpretation of a quantum logic is the set of all orthogonal projections on a Hilbert space and on a space with conjugation operator [2].

Some definitions. Let $\mathbb{C}_{m,n}$ denote the set of complex $m \times n$ matrices. Usually two vectors in $\mathbb{C}_{m,1}$ are called *orthogonal* if their Euclidean inner product is zero, i. e. $x^*y = 0$ for $x, y \in \mathbb{C}_{m,1}$ and x, y is said to be *semi-orthogonal* [3] if $\Re x^*y = 0$. The symbol A^* will stand for the conjugate transpose of $A \in \mathbb{C}_{m,n}$. By $H(A)$ we denote the Hermitian part of A, i. e. $H(A) = \frac{1}{2}(A+A^*)$. It is well known that $A \in \mathbb{C}_{m,m}$ is an orthogonal projection, i. e. an Hermitian idempotent, if and only if $(I_m - A)x$ and Ax are orthogonal for all $x \in \mathbb{C}_{m,1}$. By the analogy (see [3]), a matrix $A \in \mathbb{C}_{m,m}$ is called a *semi-orthogonal projection* if the vectors $(I_m - A)x$, Ax are semi-orthogonal for all $x \in \mathbb{C}_{m,1}$. This is equivalent that $(I_m - A^*)A$ is skew-Hermitian, which is satisfied if and only if A^*A equals the Hermitian part of A, i. e. $A^*A = \frac{1}{2}(A + A^*) = H(A)$. We wish to make clear that a semi-orthogonal projection need not be a projection in the usual sense, since it is not necessarily an idempotent.

Theorem 5 [3] says: *Let A, $B \in \mathbb{C}_{m,m}$ be semi-orthogonal projections. Let α be an arbitrary real scalar such that $0 < \alpha < 1$. Then the following statements hold:*

(a) *A^*B is a semi-orthogonal projection if and only if $H(A^*B) = H(A^*BA)$.*

(b) *$A + B$ is a semi-orthogonal projection if and only if $H(A^*B) = 0$.*

(c) *$A - B$ is a semi-orthogonal projection if and only if $H(A^*B) = H(B)$.*

(d) *$\alpha A + (1-\alpha)B$ is a semi-orthogonal projection if and only if $H(A^*B) = \frac{1}{2}[H(A) + H(B)]$.*

We note: *the condition (d) is fulfilled if and only if $A = B$.*

A partial order on semi-orthogonal projections. Let us denote by $\mathcal{S}^{or}$ the set of all semi-orthogonal projections from $\mathbb{C}_{m,m}$. First we offer a *pseudo* partial order and unary operation ${}^{\perp}$, with respect to which $\mathcal{S}^{or}$ becomes well-known structure. Let $A, B \in \mathcal{S}^{or}$.

Put $A \leqslant_1 B$ if $B - A \in \mathcal{S}^{or}$, $A^{\perp} := I_{m,m} - A$, and $A \perp B$ if $B \leqslant_1 A^{\perp}$.

Example. Let $p, q \in \mathbb{C}_{2,2}$, $q \neq p^{\perp}$, $q \neq p$ are an one-dimensional orthogonal projections. Let $\lambda \in \mathbb{C}$ be such that $|\lambda|^2 = \Re\lambda$, $0 \neq \lambda \neq 1$. It is clear that $\lambda p^{\perp}$, $(1-\lambda)q \in \mathcal{S}^{or}$. In addition, $\lambda p \leqslant_1 \lambda(p+p^{\perp}) = \lambda I_{2,2} \in \mathcal{S}^{or}$, $\lambda I_{2,2} \leqslant_1 (\lambda I_{2,2}+(1-\lambda)q) \in \mathcal{S}^{or}$. By $\lambda p^{\perp}+(1-\lambda)q \notin \mathcal{S}^{or}$, we have $\lambda p \not\leqslant_1 \lambda I_{2,2}+(1-\lambda)q = \lambda p+(\lambda p^{\perp}+(1-\lambda)q)$.

Remark. If A, $B \in \mathcal{S}^{or}$ and $A \leqslant_1 (I - B)$ then $AB \neq 0$, in general, (see, for instance, $A = \lambda P$, $B = (1-\lambda)P$ (Here $|\lambda|^2 = \Re\lambda$ and P is an orthogonal projection, $\dim P = 1$)).

Theorem. *On the set $\mathcal{S}^{or}$ with $\leqslant_1$ and ${}^{\perp}$ the conditions $(i) - (iv)$, (iv'), (v') are fulfilled.*

Now, we offer a partial order on the set $\mathcal{S}^{or}$.

Definition. Let A, $B \in \mathcal{S}^{or}$. Put $A \leqslant B$ if there exist finite subset $\{A_i\}_1^n \subset \mathcal{S}^{or}$ such that $(A+A_1+\cdots+A_{k-1})+A_k \in \mathcal{S}^{or}$ for all k, $1 \leqslant k \leqslant n$ and $A+\sum_{i=1}^{n} A_i = B$.

Let us turn to Example. By the construction, $\lambda p < (\lambda I_{2,2} + (1-\lambda)q)$.

It is clear that the relation $\leqslant$ is a transitive relation and $\leqslant_1$ entails $\leqslant$. But the converse is not true (see Example). The relation $\leqslant$ is an analogue of the corresponding partial order relation on the set of all orthogonal projections.

References

1. *Ptak P., Pulmannova S.* Orthomodular Structures as Quantum Logics.—Kluver Acad. Publ., 1991.—Vol. 44.—212 p.
2. *Matvejchuk M.* Idempotents in a space with conjugation // Linear Algebra Appl.—2013.—№ 438 (1).—P. 71–79.
3. *Gross J., Trenkler G., Troschke S.* On semi-orthogonality and a special class of matrices // Linear Algebra Appl.—1999.—№ 289.—P. 169–182.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тезисы докладов XII Международной научной конференции (с. Цей, 12–18 июля 2015 г.)

СТРОГАЯ ВЫПУКЛОСТЬ И ПРОЕКТИВНЫЕ ОПИСАНИЯ

С. Н. Мелихов

(Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ)

Доклад посвящен проблеме алгебраического проективного описания счетных индуктивных пределов весовых пространств Фреше целых функций, изоморфных сильным сопряженным к пространствам функций, голоморфных на выпуклых локально замкнутых подмножествах $\mathbb{C}^N$. Далее Q обозначает выпуклое локально замкнутое множество в $\mathbb{C}^N$, т. е. выпуклое множество, имеющее фундаментальную последовательность компактных подмножеств. Пусть $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — фундаментальная последовательность компактных подмножеств Q. Без ограничения общности можно считать, что $Q_n \subset Q_{n+1}$ и Q_n выпукло для любого $n \in \mathbb{N}$. Пусть $H(Q)$ — пространство ростков всех функций, аналитических на Q, наделенное топологией проективного предела $\mathrm{proj}_{\leftarrow n} H(Q_n)$. Здесь $H(Q_n)$ — (LB)-пространство ростков всех функций, голоморфных на компакте Q_n. Пусть H_n — опорные функции Q_n. Ниже рассматриваются весовые функции $v_{n,k}(z) := \exp(-H_n(z) - |z|/k)$, $n, k \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}^N$. Весовой индуктивный предел $VH(\mathbb{C}^N)$ пространств Фреше целых функций определяется равенством $VH(\mathbb{C}^N) := \mathrm{ind}_{n\to}\mathrm{proj}_{\leftarrow k} H(v_{n,k}, \mathbb{C}^N)$, где

$$H\big(v_{n,k}, \mathbb{C}^N\big) := \Big\{ f \in H\big(\mathbb{C}^N\big) \mid \|f\|_{v_{n,k}} := \sup_{z\in\mathbb{C}^N} v_{n,k}(z)|f(z)| < \infty \Big\}.$$

(Символ $H(\mathbb{C}^N)$ обозначает пространство всех целых в $\mathbb{C}^N$ функций.) Преобразование Лапласа является линейным топологическим изоморфизмом сильного сопряженного $H(Q)'_b$ к $H(Q)$ на $VH(\mathbb{C}^N)$. К. Д. Бирштедт, Р. Майзе, В. Саммерс [1] ввели ассоциированную систему $\overline{V}$ всех полунепрерывных сверху весов $\overline{v} : \mathbb{C}^N \to [0, +\infty)$ таких, что для любого n существуют $\alpha_n > 0$ и $k = k(n)$, для которых $\overline{v} \leqslant \alpha_n v_{n,k}$ на $\mathbb{C}^N$. Проективной оболочкой весового индуктивного предела $VH(\mathbb{C}^N)$ является пространство

$$H\overline{V}\big(\mathbb{C}^N\big) := \Big\{ f \in H\big(\mathbb{C}^N\big) \mid \|f\|_{\overline{v}} := \sup_{z\in\mathbb{C}^N} \overline{v}(z)|f(z)| < \infty \ \forall\, \overline{v} \in \overline{V} \Big\}$$

с локально выпуклой топологией, определяемой системой преднорм $\{\|\cdot\|_{\overline{v}} \mid \overline{v} \in \overline{V}\}$. Пространство $VH(\mathbb{C}^N)$ непрерывно вложено в $H\overline{V}(\mathbb{C}^N)$. Проблема алгебраического проективного описания заключается в определении условий, при которых пространства $VH(\mathbb{C}^N)$ и $H\overline{V}(\mathbb{C}^N)$ совпадают алгебраически. Соответствующие условия получены в терминах комплексных аналогов (локальной) строгой выпуклости и линейной выпуклости. Приведем два результата (для $N \geqslant 1$ и $N = 1$).

Теорема 1. *Пусть внутренность Q непуста. Предположим, что для каждой комплексной гиперплоскости T такой, что $T \cap Q = \varnothing$, существует действительная гиперплоскость Π, для которой $T \subset \Pi$ и $\Pi \cap Q = \varnothing$, и пересечение Q с любой* *опорной комплексной гиперплоскостью к $\overline{Q}$ компактно. Тогда выполняется алгебраическое равенство $VH(\mathbb{C}^N) = H\overline{V}(\mathbb{C}^N)$.*

Теорема 2. *Пусть $Q \subset \mathbb{C}$. Следующие утверждения равносильны:*

(i) *Выполняется алгебраическое равенство $VH(\mathbb{C}^N) = H\overline{V}(\mathbb{C}^N)$.*

(ii) *Дополнение Q (до $\mathbb{C}$) является объединением вещественных прямых.*

Литература

1. *Bierstedt K. D., Meise R., Summers W. H.* A projective description of weighted inductive limits // Trans. Amer. Math. Soc.—1982—Vol. 272.—P. 107–160.

СПЕЦИФИКА СИММЕТРИЧНОГО ОТРЕЗКА В ТЕОРИИ КЛАССИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА

М. А. Петросова (Россия, Москва; МПГУ),
И. В. Тихонов (Россия, Москва; МГУ),
В. Б. Шерстюков (Россия, Москва; НИЯУ МИФИ)

В теории классических полиномов Бернштейна обычно рассматривают случай стандартного отрезка $[0,1]$ (см. [1–7]). Для функции $f \in C[0,1]$ полиномы Бернштейна определяют формулой

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k \, x^k \, (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Случай симметричного отрезка $[-1,1]$ также важен в задачах аппроксимации. Он имеет свою специфику и лучше приспособлен для изучения четных и нечетных функций. Для функции $f \in C[-1,1]$ полиномы Берштейна вводят по правилу

$$B_n(f,x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{2k}{n} - 1\right) C_n^k \, (1+x)^k \, (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

С точки зрения геометрических свойств и характера сходимости конструкции (1) и (2) не имеют принципиальных различий. Однако, многие комбинаторные и алгебраические свойства полиномов Бернштейна на $[0,1]$ и на $[-1,1]$ существенно разнятся. В докладе предполагается сделать акцент именно на таких различиях. В частности, для полиномов Бернштейна на $[-1,1]$ будут обсуждаться

1) явная алгебраическая запись по степеням x и связанные с ней комбинаторные эффекты;

2) конкретные выражения полиномов Бернштейна для важных примеров степеней x^p и симметричного модуля $|x|$;

3) точный закон регулярного попарного совпадения полиномов Бернштейна в случае кусочно линейной порождающей функции;

4) модификации классических теорем с соответствующими техническими поправками.

Отдельные результаты по перечисленным темам представлены в недавних публикациях [8–11]. Также будут затронуты некоторые нерешенные проблемы, связанные с полиномами Бернштейна на симметричном отрезке.

Литература

1. *Bernstein S.* Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur la calcul des probabilités // Сообщенія Харьк. мат. о-ва.—1912.—Т. 13, № 1.—С. 1–2.
2. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций.—М.–Л.: ГИТТЛ, 1949.—688 с.
3. *Lorentz G. G.* Bernstein Polynomials.—Toronto: Univ. of Toronto Press, 1953.—x+130 p.
4. *Davis P. J.* Interpolation and Approximation.—N. Y.: Dover, 1975.—xvi+394 p.

5. *Виденский В. С.* Многочлены Бернштейна: Учеб. пособие к спецкурсу.—Л.: ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1990.—64 с.
6. *DeVore R. A., Lorentz G. G.* Constructive Approximation.—Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer–Verlag, 1993.—x+450 p.
7. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Полиномы Бернштейна: старое и новое // Мат. форум. Т. 8, ч. 1. Исследования по мат. анализу.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014.—С. 126–175.
8. *Петросова М. А., Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Случай симметричного отрезка в теории классических полиномов Бернштейна // Системы компьютерной математики и их приложения.—Смоленск: СмолГУ, 2014.—Вып. 15.—С. 184–186.
9. *Петросова М. А., Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Правило попарного склеивания для полиномов Бернштейна на симметричном отрезке // Современные методы теории функций и смежные проблемы.—Воронеж: ВГУ, 2015.—С. 98–99.
10. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Явные выражения для коэффициентов полиномов Бернштейна при алгебраической записи на симметричном отрезке // Некоторые актуальные проблемы современной математики и мат. образования.—СПб: изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2015.—С. 121–124.
11. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Полиномы Бернштейна для степенной функции на симметричном отрезке // Системы компьютерной математики и их приложения.—Смоленск: СмолГУ, 2015.—Вып. 16.—С. 215–220.

МЕТОД ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ В СПЕКТРАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА[1]

Д. М. Поляков

(Россия, Воронеж; ВГУ)

Пусть $\mathrm{L}_2[0,1]$ — гильбертово пространство суммируемых с квадратом на $[0,1]$ комплекснозначных функций со скалярным произведением

$$(x,y)=\int\limits_0^1 x(\tau)\,\overline{y(\tau)}\,d\tau,\quad x,y\in\mathrm{L}_2[0,1].$$

Через $W_2^4[0,1]$ обозначим пространство Соболева $\{y:[0,1]\to\mathbb{C}: y,y',y''$ непрерывные на $[0,1]$, y''' абсолютно непрерывна и $y^{(IV)}\in\mathrm{L}_2[0,1]\}$.

Рассмотрим оператор $L_{bc}:\mathrm{D}(L_{bc})\subset\mathrm{L}_2[0,1]\to\mathrm{L}_2[0,1]$, определенный следующим дифференциальным выражением:

$$l(y)=y^{(IV)}-a(t)y''-b(t)y,\quad \text{где}\quad a,b\in\mathrm{L}_2[0,1].$$

Область определения $D(L_{bc})$ определяется одним из двух краевых условий:

(a) периодические $bc=\mathrm{per}$: $y^{(j)}(0)=y^{(j)}(1)$, $j=0,1,2,3$;

(b) антипериодические $bc=\mathrm{ap}$: $y^{(j)}(0)=-y^{(j)}(1)$, $j=0,1,2,3$.

Следовательно, $\mathrm{D}(L_{bc})=\{y\in W_2^4[0,1]:y$ удовлетворяет $bc\}$. Оператор $L_{bc}^0:\mathrm{D}(L_{bc})=\mathrm{D}(L_{bc})\subset\mathrm{L}_2[0,1]\to\mathrm{L}_2[0,1]$, $L_{bc}^0y=y^{(IV)}$, является самосопряженным оператором с компактной резольвентой.

Для функций $a,b\in\mathrm{L}_2[0,1]$ справедливы следующие представления:

$$a(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_k\mathrm{e}^{i2\pi kt},\quad b(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}b_k\mathrm{e}^{i2\pi kt},$$

где a_k, b_k, $k\in\mathbb{Z}$, — коэффициенты Фурье функций a и b соответственно.

Спектры $\sigma(L_{bc})$ операторов L_{bc}, $bc\in\{\mathrm{per},\mathrm{ap}\}$, представимы в виде:

(a): $\sigma(L_{per})=\{(2\pi n)^4,\ n\in\mathbb{Z}_+=\mathbb{N}\cup\{0\}\}$. Собственное подпространство для $n\neq0$ имеет вид $E_n^0=\mathrm{Span}\{e_n^1,e_n^2\}$, где $e_n^1(t)=\mathrm{e}^{-i2\pi nt}$, $e_n^2(t)=\mathrm{e}^{i2\pi nt}$, $t\in[0,1]$. Если $n=0$, то $E_0^0=\{\alpha e_0,\alpha\in\mathbb{C}\}$, где $e_0(t)=1$, $t\in[0,1]$.

(b): $\sigma(L_{ap})=\{\pi^4(2n+1)^4,\ n\in\mathbb{Z}_+=\mathbb{N}\cup\{0\}\}$. Соответствующее собственное подпространство имеет вид $E_n^0=\mathrm{Span}\{e_n^1,e_n^2\}$, где $e_n^1(t)=\mathrm{e}^{-i\pi(2n+1)t}$, $e_n^2(t)=\mathrm{e}^{i\pi(2n+1)t}$, $t\in[0,1]$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 15-31-20241 мол_а_вед.

Проекторы Рисса P_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, определяются следующим образом:

(a) $P_n x = (x, e_n^1)e_n^1 + (x, e_n^2)e_n^2$, $n \in \mathbb{N}$, $P_0 x = (x, e_0)e_0$;

(b) $P_n x = (x, e_n^1)e_n^1 + (x, e_n^2)e_n^2$, $n \in \mathbb{Z}_+$,

для всех $x \in \mathrm{L}_2[0,1]$.

Спектральный анализ дифференциального оператора четвертого порядка с вещественными коэффициентами $a, a', b \in \mathrm{L}_1[0,1]$ немного более общего вида был приведен в [1]. В этой работе мы рассматриваем несколько более упрощенный оператор, но снимаем какие-либо условия на потенциалы, кроме их принадлежности $\mathrm{L}_2[0,1]$. Основным методом исследования будет являться метод подобных операторов.

Теорема 1. *Дифференциальный оператор L_{bc} является оператором с компактной резольвентой и его спектр представим в виде $\sigma(L_{bc}) = \widetilde{\sigma}_m \cup \{\widetilde{\lambda}_n, n \geqslant m+1\}$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, где $\widetilde{\sigma}_m$ — конечное множество с числом точек не превосходящим m. Собственные значения $\widetilde{\lambda}_n$ оператора L_{per} допускают следующую асимптотику:*

$$\widetilde{\lambda}_n = \left(2\pi n\right)^4 + (2\pi n)^2 a_0 + \beta_n n^2,$$

где (β_n) — суммируемая с квадратом последовательность. Для оператора L_{ap} будет справедлива аналогичная асимптотика.

Теорема 2. *Оператор $-L_{bc}$, $bc \in \{per, ap\}$, генерирует аналитическую полугруппу операторов.*

Отметим, что в этой теореме будет также приведено асимптотическое поведение этой полугруппы.

Кроме того, были получены теоремы об оценках проекторов P_n и оценках равносходимости спектральных разложений.

Литература

1. *Баданин А. В., Коротяев Е. Л.* Спектральные оценки для периодического оператора четвертого порядка // Алгебра и анализ.—2010.—Т. 22, № 5.—С. 1–48.

О ПОРОЖДАЮЩИХ ПРОЕКТИВНЫХ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ[1]

Д. А. Полякова

(Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ)

Пусть $H_\Phi(\mathbb{C}) = \big\{f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|_n = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp\varphi_n(z)} < \infty, \forall\, n \in \mathbb{N}\big\}$ — проективное пространство целых функций, определяемое весовой последовательностью $\Phi = (\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$. Далее, пусть p — некоторое натуральное число и при каждом i от 1 до p заданы линейное подпространство $H_{\Phi^i}(\mathbb{C})$ пространства $H_\Phi(\mathbb{C})$ и целая функция $a_i(z)$, являющаяся мультипликатором из $H_{\Phi^i}(\mathbb{C})$ в $H_\Phi(\mathbb{C})$. Тогда $\sum_{i=1}^{p} a_i H_{\Phi^i}(\mathbb{C}) \subset H_\Phi(\mathbb{C})$. Говорят, что функции $a_1, \ldots, a_p$ и подмножества $H_{\Phi^1}(\mathbb{C}), \ldots, H_{\Phi^p}(\mathbb{C})$ порождают $H_\Phi(\mathbb{C})$, если выполняется равенство $\sum_{i=1}^{p} a_i H_{\Phi^i}(\mathbb{C}) = H_\Phi(\mathbb{C})$.

В работе выделен важный с точки зрения приложений класс весовых последовательностей $\Phi = (\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$, $\varphi_n(z) = u_n(|z|) + v(z)$, состоящих из радиальных и нерадиальной компонент. Сформулированы легко проверяемые условия на Φ, при которых установлено полное описание порождающих соответствующих пространств $H_\Phi(\mathbb{C})$.

Именно, предполагается, что функции $u_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ непрерывны, не убывают и удовлетворяют условиям: 1) $u_n(e^x)$ выпукла на $[0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$; 2) семейство $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ равномерно ρ-устойчиво на $[0,\infty)$; 3) $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, D_n > 0$: $u_{n+1}(t) + \ln\frac{1+t^2}{\rho(t)} \leqslant u_n(t) + D_n$, $t \geqslant 0$. Функция $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ — произвольная субгармоническая ρ-устойчивая функция в $\mathbb{C}$. Здесь $\rho = \rho(t)$ — регулярная функция расстояния (определения регулярной функции расстояния и ρ-устойчивости см. в [1]).

Далее, пусть $r_i(z)$ — неотрицательная непрерывная субгармоническая в $\mathbb{C}$ функция и $\Phi^i = \big(\varphi_n(z) - r_i(z)\big)$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant i \leqslant p$. Будем считать, что последовательности Φ^i, $1 \leqslant i \leqslant p$, имеют такой же вид, что и Φ, и удовлетворяют перечисленным выше требованиям.

Основным результатом работы является

Теорема 1. *Для того чтобы функции $a_1, \ldots, a_p$ и подмножества $H_{\Phi^1}(\mathbb{C}), \ldots, H_{\Phi^p}(\mathbb{C})$ порождали $H_\Phi(\mathbb{C})$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\forall\, m \in \mathbb{N}\ \exists\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, B > 0 : \sum_{i=1}^{p} \frac{|a_i(z)|}{e^{r_i(z)}} \geqslant B e^{-u_m(z)+u_n(z)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Доказательство основано на полученном недавно результате о разрешимости неоднородного уравнения Коши — Римана в проективных пространствах

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 14-01-31083.

измеримых функций, задаваемых весовыми последовательностями из указанного класса.

Теорема 1 гораздо более проста и удобна в применении, чем известный ранее результат О. В. Епифанова (см. [2, теорема 4]). Кроме того, за счет введения функции $\rho(z)$ она применима для новых по сравнению с [2] весовых последовательностей.

В качестве одного из приложений теоремы 1 в работе установлены условия нормальной разрешимости систем уравнений свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций Румье.

Литература

1. *Abanin A. V., Pham Trong Tien.* Continuation of holomorphic functions and some of its applications // Stud. Math.—2010.—Vol. 200.—P. 279–295.
2. *Епифанов О. В.* О разрешимости неоднородного уравнения Коши — Римана в классах функций, ограниченных с весом и системой весов // Мат. заметки.—1992.—Т. 51, № 1.—С. 83–92.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ О ПАРРАЛЛЕЛЕПИПЕДАХ[1]

Н. В. Рассказова

(Россия, Рубцовск; РИИ АлтГТУ)

Экстремальные задачи интересовали человека с древних времен. И в настоящее время интерес к решению задач такого типа не ослабевает. Интересной задачей является нахождение экстремальных значений интегралов поперечных мер Минковского для прямоугольного параллелепипеда $P = ABCDA'B'C'D'$ с заданным геодезическим диаметром $D(P)$.

Под геодезическим (внутренним) диаметром параллелепипеда P (точнее, его поверхности) будем понимать максимальное геодезическое (внутреннее) расстояние между парой точек на поверхности параллелепипеда. Обозначим $|AB| = a$, $|AD| = b$, $|AA'| = c$, где $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c$.

Сопоставим параллелепипеду P следующие интегралы поперечных мер Минковского W_i, $i = 0, 1, 2, 3$ [6]: $W_0(P) = V(P)$, $W_1(P) = F(P)/3$, $W_2(P) = M(P)/3$, $W_3(P) = \mathrm{const} = 4\pi/3$, где $V(P) = abc$ — объем, $F(P) = 2(ab+ac+bc)$ — площадь поверхности, $M(P) = \pi(a + b + c)$ — интеграл средней кривизны.

Для удобства мы будем рассматривать также *вырожденные параллелепипеды*, что соответствует случаю $a = 0$.

Случай $W_3 = 4\pi/3$ является тривиальным.

Экстремальные значения *площади поверхности* $F(P)$ параллелепипеда P были найдены Ю. Г. Никоноровым и Ю. В. Никоноровой в [7], где было доказано, что максимум площади поверхности достигается на параллелепипеде с соотношением длин ребер $a : b : c = 1 : 1 : \sqrt{2}$. В частности, для произвольных параллелепипедов выполняется соотношение $ab + ac + bc \leqslant \frac{1+2\sqrt{2}}{6}\,(D(P))^2$. Минимум в данном случае, очевидно, равен 0 и достигается в точности на (вырожденных) параллелепипедах со свойством $a = b = 0$.

Далее в [3] были получены экстремальные значения для *интеграла средней кривизны* $M(P)$. В частности, наибольшее значение $M(P)$ достигается в точности на параллелепипедах с соотношением длин ребер $a : b : c = 0 : 1 : 1$, а наименьшее значение — на параллелепипедах с соотношением длин ребер $a : b : c = 0 : 0 : 1$. Таким образом, для произвольного прямоугольного параллелепипеда выполнено неравенство $\pi D(P) \leqslant M(P) \leqslant \pi\sqrt{2}D(P)$.

И, наконец, в [4] были получены экстремальные значения *объема* $V(P)$ параллелепипеда. Очевидно, что минимум равен 0 и достигается в точности на (вырожденных) параллелепипедах при $a = 0$. Наибольшее значение объема $V(P)$ среди всех прямоугольных параллелепипедов с заданным геодезическим диаметром достигается в точности на параллелепипедах с соотношением длин ребер $a : b : c = 1 : 1 : \sqrt{2}$. Таким образом, для произвольного прямоугольного параллелепипеда выполнено неравенство $abc \leqslant \frac{1}{6\sqrt{3}}D(P)^3$.

[1]Работа выполнена при частичной поддержке Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российский ученых и ведущих научных школ РФ, грант № НШ-2263.2014.1.

Литература

1. *Вялый М. Н.* Кратчайшие пути по поверхности параллелепипеда // Мат. просвещение. Сер. 3.—М.: Изд-во МЦНМО, 2005.—Вып. 9—С. 203–206.
2. *Никоноров Ю. Г., Никонорова Ю. В.* О внутреннем расстоянии на поверхности параллелепипеда // Тр. Рубц. индустр. ин-та.—2000.—Т. 9.—С. 222–228.
3. *Рассказова Н. В.* Экстремальные значения интеграла средней кривизны на множестве параллелепипедов с заданным геодезическим диаметром // Владикавк. мат. журн.—2013.—Т. 15, вып. 2.—С. 78–82.
4. *Рассказова Н. В.* Экстремальные значения объема на трехмерных параллелепипедах с заданным геодезическим диаметром // Владикавк. мат. журн.—2013.—Т. 15, вып. 4.—С. 44–47.
5. *Сантало Л. А.* Интегральная геометрия и геометрические вероятности.—М.: Наука, 1983.—360 с.
6. *Хадвигер Г.* Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии.—М.: Наука, 1966.—416 с.
7. *Nikonorov Yu. G., Nikonorova Yu. V.* The intrinsic diameter of the surface of a parallelepiped // Discrete and Computational Geometry.—2008.—Vol. 40.—P. 504–527.

О КРАТНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ[1]

Е. Г. Родикова (Россия, Брянск; БГУ),
В. А. Беднаж (Россия, Брянск; БГУ),
Ф. А. Шамоян (Россия, Брянск; БГУ)

Пусть $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, D — единичный круг на $\mathbb{C}$, $H(D)$ — множество всех функций, аналитических в D. Для любого положительного $\alpha > 0$ определим класс S_α^∞ (см. [1]):

$$S_\alpha^\infty := \left\{ f \in H(D) : T(r,f) \leqslant \frac{C_f}{(1-r)^\alpha} \right\},$$

где $C_f > 0$ — положительная константа, значения которой зависят разве что от функции f, $r \in [0,1)$, $T(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi$ — характеристика Р. Неванлинны функции f (см. [2]).

Хорошо известно, если $f \in S_\alpha^\infty$, то

$$M(r,f) = \max_{|z|\leqslant r} |f(z)| \leqslant \exp\left\{ \frac{c_f}{(1-r)^{\alpha+1}} \right\}$$

при всех $\alpha > 0$, $c_f > 0$ (см. [1]).

Сформулируем задачу кратной интерполяции в классе S_α^∞: пусть $\{\alpha_k\}_1^\infty$ и $\{\gamma_k\}_1^\infty$ — произвольные последовательности комплексных чисел из D; обозначим через q_j — кратность появления числа α_j во всей последовательности $\{\alpha_k\}_1^\infty$, $s_j \geqslant 1$ — кратность появления числа α_j на отрезке $\{\alpha_k\}_{k=1}^j$. Очевидно, что $1 \leqslant s_j \leqslant q_j \leqslant +\infty$. Требуется выявить критерии для $\{\alpha_k\}_1^\infty$ и $\{\gamma_k\}_1^\infty$, обеспечивающие существование функции $f \in S_\alpha^\infty$ такой, что

$$f^{(s_k-1)}(\alpha_k) = \gamma_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Отметим, что теория интерполяции стала интенсивно развиваться после основополагающей работы Л. Карлесона [3] об интерполяции в классе ограниченных аналитических функций. Задача кратной интерполяции в классах Харди решалась в работе М. М. Джрбашяна (см. [4]).

Для формулировки основного результата введем дополнительные обозначения и определения. Для любого $p \in \mathbb{Z}_+$ символом $\pi_p(z, \alpha_j)$ будем обозначать бесконечное произведение М. М. Джрбашяна с нулями в точках последовательности $\{\alpha_j\}_{j=1}^{+\infty} \subset D$ (см. [5]):

$$\pi_p(z,\alpha_j) = \prod_{j=1}^{+\infty} \frac{\alpha_j - z}{1-\overline{\alpha}_j z}\,\overline{\alpha}_j \exp\left\{ \sum_{s=1}^{p} \frac{1}{s} \left(\frac{1-|\alpha_j|^2}{1-\overline{\alpha}_j z} \right)^s \right\}.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 13-01-97508, и Министерства образования и науки РФ, проект № 1.1704.2014К.

Обозначим $\pi_{p,n}(z,\alpha_j)$ произведение $\pi_p(z,\alpha_j)$ без n-го фактора.

Как установлено в [5], произведение $\pi_p(z,\alpha_j)$ сходится абсолютно и равномерно в D тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{+\infty}(1-|\alpha_j|)^{p+1}<+\infty.$$

Углом Штольца $\Gamma_\delta(\theta)$ с вершиной в точке $e^{i\theta}$ называется угол раствора $\pi\delta$, $0<\delta<1$, биссектриса которого совпадает с отрезком $re^{i\theta}$, $0\leqslant r<1$.

Последовательность комплексных чисел $\{\alpha_j\}_{j=1}^{+\infty}$, удовлетворяющих условиям

$$n(r)=\operatorname{card}\{\alpha_k:|\alpha_k|<r\}\leqslant\frac{c}{(1-r)^{\alpha+1}},$$

$$\left|\pi_{p,n}(\alpha_j,\alpha_n)\right|\geqslant\exp\frac{-c_0}{(1-|\alpha_n|)^{\alpha+1}},\quad p>\alpha,\ c_0>0,$$

$$\sup_{k\geqslant 1}\{q_k\}=q,$$

отнесем к классу $\widetilde{\Delta}$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть последовательность комплексных чисел* $\{\alpha_k\}\subset\bigcup_{s=1}^{n}\Gamma_\delta(\theta_s)$ *для некоторого* $0<\delta<\frac{1}{\alpha+1}$. *Если* $\{\alpha_k\}_1^\infty\in\widetilde{\Delta}$, *то для любой последовательности* $\{\gamma_k\}_1^\infty$ *такой, что*

$$|\gamma_k|\leqslant\exp\frac{\delta}{(1-|\alpha_k|)^{\alpha+1}},\quad k=1,2,\ldots,\tag{1}$$

можно построить в явном виде функцию $f\in S_\alpha^\infty$, *являющуюся решением интерполяционной задачи*

$$f^{(s_k-1)}(\alpha_k)=\gamma_k,\quad k=1,2,\ldots\tag{2}$$

Обратно, если задача (2) *разрешима при всех* $s_k\geqslant 1$ *и* $\{\gamma_k\}_1^\infty$, *удовлетворяющей условию* (1), *то* $\{\alpha_k\}_1^\infty\in\widetilde{\Delta}$.

Литература

1. *Шамоян Ф. А., Шубабко Е. Н.* Введение в теорию весовых L^p-классов мероморфных функций.—Брянск: группа компаний «Десяточка», 2009.—152 с.
2. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции / Пер. с нем.—М.–Л.: ГИТТЛ, 1941.—388 с.
3. *Carleson L.* An interpolation problem for bounded analytic functions // Amer. J. Math. — 1958.—Vol. 80.—P. 921–930.
4. *Джрбашян М. М.* Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классах H^p в полуплоскости // Изв. АН СССР. Сер. Математика.—1978.—Т. 43, № 6.—С. 1327–1384.
5. *Джрбашян М. М.* К проблеме представимости аналитических функций // Сообщения Ин-та математики и механики АН Арм. ССР.—1948.—Т. 2.—С. 3–40.

ОБ ОДНОМ ТОЧНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ДЛЯ СТЕПЕНЕЙ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

Е. О. Сивкова

(Россия, Москва; МГУ)

Пусть $F\colon L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)$ — преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Если $\alpha \geqslant 0$ и функция $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ такова, что функция $\psi\colon \xi \to |\xi|^\alpha (Ff)(\xi)$ также принадлежит $L_2(\mathbb{R}^d)$, то $(\alpha/2)$-степенью оператора Лапласа функции $f(\cdot)$ называется функция, преобразование Фурье которой есть $\psi(\cdot)$, и обозначается $(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)$.

Ясно, что $(-\Delta)^0 f(\cdot) = f(\cdot)$, а если $\alpha = 2$ и функция $f(\cdot)$ достаточно гладкая, то это обычный ее лапласиан:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_d^2}.$$

Соболевским пространством $\mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$ называется совокупность таких функций $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, что функция $\xi \mapsto (1 + |\xi|^2)^{\alpha/2} (Ff)(\xi)$ также принадлежит $L_2(\mathbb{R}^d)$ ($\mathcal{W}_2^0(\mathbb{R}^d) = L_2(\mathbb{R}^d)$). Это гильбертово пространство со скалярным произведением

$$\bigl(f(\cdot), g(\cdot)\bigr) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \bigl(1 + |\xi|^2\bigr)^\alpha (Ff)(\xi) \overline{(Fg)(\xi)}\, d\xi$$

и соответствующей нормой

$$\bigl\|f(\cdot)\bigr\|_{\mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)} = \left(\frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \bigl(1 + |\xi|^2\bigr)^\alpha \bigl|(Ff)(\xi)\bigr|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

В пространстве $\mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим подпространство

$$\mathcal{W}_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d) = \bigl\{ f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d) \bigm| (Ff)(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}^d) \bigr\}.$$

Для краткости обозначим

$$\gamma(d) = 2^{d-1} \pi^{d/2} \Gamma(d/2),$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера.

Теорема. *Пусть $\alpha > 0$, $\beta \geqslant 0$ и $\alpha - \beta > d/2$. Тогда для всех функций $f(\cdot) \in \mathcal{W}_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d)$ справедливо точное неравенство*

$$\Bigl\|(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot)\Bigr\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant K \Bigl\|(Ff)(\cdot)\Bigr\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}^{\frac{2\alpha - 2\beta - d}{d + 2\alpha}} \Bigl\|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)\Bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{\frac{2d + 2\beta}{d + 2\alpha}},$$

где

$$K = \frac{(d/2 + \alpha)^{\frac{d + \beta}{d + 2\alpha}}}{d + \beta} \left(\frac{2\alpha - \beta}{\gamma(d)(2\alpha - 2\beta - d)} \right)^{\frac{2\alpha - \beta}{d + 2\alpha}}.$$

Точность неравенства означает, что существует функция, на которой это неравенство обращается в равенство. Данное неравенство есть аналог неравенств для производных Ландау — Колмогорова, которые играют важную роль в анализе, в дифференциальных уравнениях и теории приближений.

Литература

1. *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* О неравенствах для производных колмогоровского типа // Мат. сб.—1997.—Т. 188, № 12.—С. 73–106.
2. *Магарил-Ильяев Г. Г., Сивкова Е. О.* Наилучшее восстановление оператора Лапласа функции по ее неточно заданному спектру // Мат. сб.—2012.—Т. 203, № 4.—С. 119–130.
3. *Сивкова Е. О.* Об оптимальном восстановлении лапласиана функции по ее неточно заданному преобразованию Фурье // Владикавк. мат. журн.—2012.—Т. 14, № 4.—С. 63–72.

ОБ ОПЕРАТОРЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА НА НЕВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ

Л. В. Стефаненко

(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Пусть G — область в $\mathbb{C}$; $A(G)$ — пространство Фреше всех функций, аналитических в G. Для целой функции $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$, нулевого типа при порядке 1 дифференциальный оператор бесконечного порядка $a(D)(f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f^{(n)}$ линейно и непрерывно отображает $A(G)$ в $A(G)$. Условия сюрьективности оператора $a(D) : A(G) \to A(G)$ получены Ю. Ф. Коробейником [1], С. В. Знаменским [2] и О. В. Епифановым [3]. В последние 30 лет появилось значительное число работ, в которых решалась проблема существования линейного непрерывного правого обратного (ЛНПО) к оператору $a(D) : A(G) \to A(G)$. Она полностью решена для выпуклых областей G (S. Momm, Ю. Ф. Коробейник, С. Н. Мелихов). Для невыпуклых областей G соответствующих результатов получено значительно меньше.

В настоящем докладе идет речь о достаточных условиях, при которых оператор $a(D) : A(G) \to A(G)$ имеет ЛНПО. Эти условия формулируются в терминах, связывающих поведение характеристической функции a, ее нулей и геометрии области G. Приведем необходимые определения из работ [1–3] и соответствующие обозначения.

Далее q — множество всех направлений выпуклости G, $h(-\theta)$ — опорная функция выпуклой оболочки G. При этом $\theta \in \mathbb{R}$ называется направлением выпуклости области G, если для любого $a \in \mathbb{R}$ множество $\{z|\, G \cap \operatorname{Re}(ze^{-i\theta}) > a\}$ связно.

Пусть Ω — выпуклая область в $\mathbb{C}$, отличная от $\mathbb{C}$; φ — конформное отображение единичного круга $|z| < 1$ на Ω; $\Omega_r = \varphi(\{z \in \mathbb{C}|\, |z| \leqslant r\})$ — соответствующие множества уровня; $h_r(-\theta)$ — опорная функция (выпуклого) компакта Ω_r, $r \in (0, 1)$. Положим

$$d_\Omega(\theta) = \lim_{r \to 1-0} \frac{h(-\theta) - h_r(-\theta)}{1 - r}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

$d_\Omega(\theta)$ — характеристика граничного поведения конформного отображения φ. Всегда $d_\Omega(\theta) \in (0, +\infty]$.

Определение. Будем говорить, что Ω удовлетворяет условию (RE), если $\sup_{\theta \in \mathbb{R}} d_\Omega(\theta) < +\infty$.

Пусть $\mathcal{A}$ — множество предельных точек последовательности $\{-\arg \lambda_k|\, a(\lambda_k) = 0\}$ (нули λ_k попарно различны). Для множества $M \subseteq \mathbb{C}$ символ $\overline{M}$ обозначает замыкание M (в $\mathbb{C}$); а ∂M — границу M (в $\mathbb{C}$). Приведем один из результатов.

Теорема. 1) *Если функция a является ненулевым многочленом и область G односвязная, то оператор $a(D) : A(G) \to A(G)$ имеет ЛНПО.*

2) *Пусть функция* a *отлична от многочлена. Предположим, что существует ограниченная выпуклая область* $\Omega \subseteq G$, *удовлетворяющая условию* (RE) *и такая, что*

(*i*) $\overline{\Omega}$ *и* $\overline{G}$ *имеют в точке* α *общую опорную прямую, соответствующую направлению выпуклости* θ_0;

(*ii*) $\overline{\Omega} \cap \partial G = \{\alpha\}$;

(*iii*) $\mathcal{A} = \{-\theta_0\}$ *и* $-\theta_0 \in q$.

Тогда оператор $a(D) : A(G) \to A(G)$ *имеет ЛНПО.*

Замечание. Этот результат был получен ранее Ю. Ф. Коробейником в случае, когда Ω является кругом [4, теорема 6.1]. Существуют области G (и операторы $a(D)$), удовлетворяющие условиям теоремы, для которых соответствующая область Ω не может быть кругом.

Литература

1. *Коробейник Ю. Ф.* Существование аналитического решения дифференциального уравнения бесконечного порядка и характер его области аналитичности // Мат. сб.—1969.—Т. 80, № 1.—С. 52–76.
2. *Знаменский С. В.* Об областях существования аналитических решений дифференциального авнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами // Препринт.—Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1976.
3. *Епифанов О. В.* Критерий эпиморфности свертки в произвольных областях комплексной плоскости // Мат. заметки.—1982.—Т. 31, № 5.—С. 695–705.
4. *Коробейник Ю. Ф.* О правом обратном для оператора свертки, действующего в пространствах ростков на связных множествах в $\mathbb{C}$ // Мат. сб.—1996.—Т. 187, № 1.—С. 55–82.

О СВЯЗИ ЯНГИАНОВ И КВАНТОВЫХ АФФИННЫХ СУПЕРАЛГЕБР

В. А. Стукопин

(Россия, Ростов-на-Дону, ДГТУ; Владикавказ, ЮМИ)

Будем обозначать через $L\mathfrak{g}$ супералгебру Ли (лорановских полиномиальных) петель со значениями в базисной супералгебре Ли $\mathfrak{g}$. Отметим, что это просто аффинная (супер) алгебра Каца — Муди без центрального элемента и градуировочного элемента d, задающего дифференцирование. Мы построим гомоморфизм квантовой (супер)алгебры токов $U_\hbar(L\mathfrak{g})$ на квантовую (супер)алгебру $Y_\hbar(\mathfrak{g})$, из которой янгиан $Y(\mathfrak{g})$ получается специализацией при $\hbar = 1$. При построении мы ограничимся рассмотрением частного случая базисной супералгебры Ли типа $A(m,n)$ (см. [1]).

Пусть $\{E_{i,r}, F_{i,r}, H_{i,r}\}_{i\in I,\, r\in\mathbb{Z}}$ — токовые образующие квантовой аффинной алгебры $U_\hbar((L\mathfrak{g})$, а $\{e_{i,k}, f_{i,k}, h_{i,k}\}_{i\in I,\, k\in\mathbb{Z}_+}$ — образующие янгиана $Y_\hbar(\mathfrak{g})$ ([1]). Определим отображение

$$\Phi : U_\hbar((L\mathfrak{g}) \to Y_\hbar(\mathfrak{g}) \tag{1}$$

на образующих следующими формулами:

$$\begin{aligned}
\Phi(H_{i,r}) &= \frac{\hbar}{q_i - q_i^{-1}} \sum_{k\geqslant 0} t_{i,k}\, \frac{r^k}{k!},\\
\Phi(E_{i,r}) &= e^{r\sigma_i^+} \sum_{m\geqslant 0} g_{i,m}^+ e_{i,m},\\
\Phi(F_{i,r}) &= e^{r\sigma_i^-} \sum_{m\geqslant 0} g_{i,m}^- f_{i,m}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь, как и выше в этой главе, мы используем следующие обозначения: $q = e^{\hbar/2}$, $q_i = q^{d_i}$ — элементы симметризующей матрицы для матрицы Картана (супер) алгебры Ли $\mathfrak{g} = A(m,n)$. Мы используем систему логарифмических образующих $\{t_{i,r}\}_{i\in I,\, r\in\mathbb{N}}$ коммутативной подалгебры $Y_\hbar(\mathfrak{h}) \subset Y_\hbar(\mathfrak{g})$ порожденную элементами $\{h_{i,r}\}_{i\in I,\, r\in\mathbb{N}}$, аналогичную системе, логарифмических картановских образующих, обычно используемых для янгиана. Эти логарифмические образующие для квантованной универсальной обертывающей супералгебры определяются следующим равенством для порождающих функций:

$$\hbar \sum_{r\geqslant 0} t_{i,r} u^{-r-1} = \log\Bigl(1 + \sum_{r\geqslant 0} h_{i,r} u^{-r-1}\Bigr). \tag{3}$$

Элементы $\{g_{i,m}^{\pm}\}_{i\in I,\, m\in\mathbb{N}}$ лежат в пополнении алгебры $Y_\hbar(\mathfrak{h})$ и определяются следующим образом. Рассмотрим следующий формальный степенной ряд: $G(v) = \log\left(\frac{v}{e^{v/2} - e^{v/2}}\right) \in Q[[v]]$ и определим $\gamma_i \in \widehat{Y^0[v]}$ формулой

$$\gamma_i(v) = \hbar \sum_{r\geqslant 0} \frac{t_{i,r}}{r!} \left(-\frac{d}{dv}\right)^{r+1} G(v).$$

Тогда
$$\sum_{m\geqslant 0} g^{\pm}_{i,m} v^m = \left(\frac{\hbar}{q_i - q_i^{-1}}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{\gamma_i(v)}{2}\right).$$
Окончательно, $\sigma_i^{\pm}$ — это гомоморфизмы подсуперАлгебр

$$\sigma_i^{\pm}:\ Y_\hbar(\mathfrak{b}_\pm)\,(\subset Y_\hbar(\mathfrak{g})) \to Y_\hbar(\mathfrak{b}_\pm),$$

которые задаются на образующих $\{h_{i,r}, e_{i,r}, f_{i,r}\}$ следующим образом. Они оставляют неподвижными образующие $h_{i,k}$, а на остальные образующие действуют сдвигами $\sigma_i^+ : e_{j,r} \to e_{j,r+\delta_{ij}}$, $\sigma_i^- : f_{j,r} \to f_{j,r+\delta_{ij}}$.

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. 1. *Отображение*

$$\Phi : U_\hbar((L\mathfrak{g}) \to Y_\hbar(\mathfrak{g}),$$

однозначно определяется формулами (1), (2) *и является гомоморфизмом ассоциативных алгебр.*

2. *Отображение* Φ *единственным образом может быть продолжено до гомоморфизма топологических пополнений:*

$$\widehat{\Phi} : \widehat{U_\hbar(L\mathfrak{g})} \to \widehat{Y_\hbar(\mathfrak{g})}, \tag{4}$$

причем отображение $\widehat{\Phi}$ *является изоморфизмом топологических ассоциативных (супер) алгебр.*

Литература

1. *Стукопин В. А.* О дубле янгиана супералгебры Ли типа $A(m,n)$ // Функцион. анализ и его прил.—2006.—Т. 40, № 2.—С. 86–90.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВЕЙВЛЕТЫ НА ОСНОВЕ ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЕВА ВТОРОГО РОДА

М. М. Султанахмедов

(Россия, Махачкала; ДНЦ РАН)

Пусть $w(x) = \sqrt{1-x^2}$, обозначим тогда через $L_{2,w}([-1;1])$ евклидово пространство интегрируемых функций $f(x)$ таких, что $\int_{-1}^{1} f^2(x)w(x)\,dx < \infty$. Скалярное произведение в нем определим с помощью равенства $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)w(x)\,dx$.

Хорошо известно, что полиномы Чебышева второго рода $U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$ $(n = 0,1,2,\dots)$ образуют ортогональный базис в $L_{2,w}([-1;1])$. Для нулей полинома $U_n(x)$ введем обозначение

$$\xi_k^{(n)} = \cos\theta_k^{(n)} = \cos\frac{\pi(k+1)}{n+1}, \quad (k = 0,\dots,n-1),$$

т. е. $U_n\big(\xi_k^{(n)}\big) = 0$ $(k = 0,\dots,n-1)$.

Для любых $n = 1,2,\dots$ *масштабирующей функцией Чебышева второго рода* назовем полином вида

$$\phi_{n,k}(x) = \sum_{j=0}^{n} U_j(x)U_j\big(\xi_k^{(n+1)}\big) \quad (k = 0,1,\dots,n),$$

и *вейвлет-функцией Чебышева второго рода* полином

$$\psi_{n,k}(x) = \sum_{j=n+1}^{2n} U_j(x)U_j\big(\xi_k^{(n)}\big) \quad (k = 0,1,\dots,n-1).$$

Ранее было доказано, что $\{\phi_{n,k}(x)\}_{k=0}^{n}$ и $\{\psi_{n,k}(x)\}_{k=0}^{n-1}$ ортогональны в $L_{2,w}([-1;1])$ при всех $n = 1,2,\dots$ На их основе построен ортонормированный базис в $L_{2,w}([-1;1])$: $\{\widehat{\phi}_{0,0}(x), \widehat{\phi}_{0,1}(x), \widehat{\psi}_{0,0}(x), \widehat{\psi}_{1,0}(x), \dots, \widehat{\psi}_{m,0}(x), \widehat{\psi}_{m,1}(x), \dots\}$, т. е. для каждой функции $f(x) \in L_{2,w}([-1;1])$ существует разложение в вейвлет-ряд

$$f(x) = \widehat{a}_0\widehat{\phi}_{0,0}(x) + \widehat{a}_1\widehat{\phi}_{0,1}(x) + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1} \widehat{b}_{j,k}\,\widehat{\psi}_{j,k}(x). \tag{1}$$

В настоящей работе показан недостаток в свойствах сходимости частичных сумм ряда (1) к исходной функции $f(x)$, связанный со свойствами самих полиномов Чебышева второго рода. Предлагается модифицировать вейвлет-ряд по аналогии со специальными рядами по ортогональным полиномам со свойством «прилипания», введенным в недавних работах И. И. Шарапудинова [1–2], и рассмотреть ряд вида

$$f(x) = c(f,x) + \big(1-x^2\big)\left[\widetilde{a}_0\widehat{\phi}_{0,0}(x) + \widetilde{a}_1\widehat{\phi}_{0,1}(x) + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1} \widetilde{b}_{j,k}\,\widehat{\psi}_{j,k}(x)\right], \tag{2}$$

где $c(f,x)=\frac{f(-1)+f(1)}{2}-\frac{f(-1)-f(1)}{2}x$.

Исследованы аппроксимативные свойства частичных сумм такого специального вейвлет-ряда вида

$$\widetilde{\mathcal{V}}_{2^m}(f,x)=c(f,x)+\left(1-x^2\right)\left[\widetilde{a}_0\widehat{\phi}_{0,0}(x)+\widetilde{a}_1\widehat{\phi}_{0,1}(x)+\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}\widetilde{b}_{j,k}\widehat{\psi}_{j,k}(x)\right].$$

Доказано, что для любой точки $x\in(-1,1)$ существует некоторая константа $c>0$ такая, что справедлива оценка

$$\left|f(x)-\widetilde{\mathcal{V}}_{2^m}(f,x)\right|\leqslant cE_{2^m+2}(f)\left(1+\ln\left(1+(2^m+2)\sqrt{1-x^2}\right)\right),$$

тогда как на концах отрезка $[-1,1]$ значения частичных сумм ряда (2) совпадают со значениями исходной функции в этих точках:

$$\widetilde{\mathcal{V}}_{2^m}(f,\pm1)=f(\pm1).$$

Литература

1. *Шарапудинов И. И.* Предельные ультрасферические ряды и их аппроксимативные свойства // Мат. заметки.—2013.—Т. 94, № 2.—С. 295–309.
2. *Шарапудинов И.И.* Некоторые специальные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства // Изв. РАН. Сер. мат.—2014.—Т. 78, № 5.—С. 201–224.

О ФУНКЦИЯХ БАЗИЛЕВИЧА МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

М. Д. Султыгов
(Россия, Магас; ИнгГУ)

Известно, что уравнение Левнера — Куфарева

$$\frac{\partial f}{\partial t} = zh(z,t)\frac{\partial f}{\partial z}, \quad 0 \leqslant t < \infty, \ z \in E, \tag{1}$$

где E — единичный круг, открывает широкие возможности для получения новых классов однолистных функций. Впервые это показал И. Е. Базилевича в [1].

Теорема 1. *Аналитическая функция*

$$f(z) = \left[\frac{\alpha + i\beta}{1 + i\alpha}\int\limits_0^z h(\zeta)\zeta^{i\beta - 1}g^{\alpha}(\zeta)\, d\zeta\right]^{\frac{1}{\alpha + i\beta}} \tag{2}$$

является однолистной в E, *если* $\Re h(z) \geqslant 0$, $g(z) \in S^*$, $h(0) = 1 + i\alpha$, $\alpha > 0$, $\beta \in (-\infty, \infty)$.

Для многомерного случая аналогов нет, но в работах автора [2–5] получены некоторые частные, а может быть и не частные, случаи.

Теорема 2 [2]. *Функция* $f(z)$ *принадлежит классу* $B_D(\alpha, \beta, \sigma)$ *при* $0 \leqslant \sigma < \alpha < \infty$, $\beta \in R^1$ *тогда и только тогда, когда существует такая функция* $F(z) \in M_D$ [5], *что в* D

$$f(z) = \left\{(\alpha + i\beta)\int\limits_0^1 [F(\varepsilon z)]^{\alpha - \sigma}\varepsilon^{\alpha - 1 + i\beta} d\varepsilon\right\}^{\frac{1}{\alpha + i\beta}}, \tag{3}$$

где для степенной функции взято главное значение.

Из теоремы 2 вытекают следующие свойства:
1. $B_D(\alpha, \beta, \sigma) \sim M_D$;
2. $B_D(\alpha, \beta, \sigma) \subseteq MS_D\left(\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\sigma}{\alpha}\right)$;
3. $B_D(\alpha, \beta, \sigma) \subseteq B_D(\alpha_1, \beta_1, \sigma_1)$;
4. $MS_D\left(\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}, 0\right) \subseteq B_D(\alpha, \beta, \sigma)$.

Теорема 3 [3]. *Необходимым и достаточным условием принадлежности голоморфной функции* $f(z)$ *классу* $B_D(\lambda, \alpha, \beta)$ *является ее интегральное представление*

$$f(z) = \left\{\frac{e^{i\lambda}}{\alpha}L^{(-1)}_{\frac{e^{i\lambda}}{\alpha}}[F(z)]^{\frac{e^{i\lambda}}{\alpha}}\right\}^{\alpha e^{-i\lambda}} = \left\{\frac{e^{i\lambda}}{\alpha}[F(\varepsilon z)]^{\frac{e^{i\lambda}}{\alpha}}\varepsilon^{\frac{e^{i\lambda}}{\alpha}}\right\}^{\alpha e^{-i\lambda}},$$

где $f_k \equiv L_{n-1}\left[L_{n-2}\ldots[L_{n-k}[f]]\ldots\right]$ *— суперпозиция операторов И. И. Баврина* [6]*:*

$$L_p[f(z)] = pf(z) + \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial f(z)}{\partial z_j}, \quad L_{n,n-1}^{(0)}[f] \equiv f, \quad L_{n-1,n-1}^{(1)}[f] \equiv L_{n-1}[f]$$

и значение функции $\nu = \nu(\tau, t)$ *выражается в виде определителя матрицы порядка* $2n$*, а функции* $F(z) \in B_D(\lambda, 0, \beta)$*.*

Обратным к оператору $L_p[f(z)]$ является оператор

$$L_p^{(-1)} f(z) = \int\limits_0^1 \varepsilon^{p-1} f(\varepsilon z_1, \ldots, \varepsilon z_n)\, d\varepsilon.$$

Отметим ряд свойств голоморфных функций Базилевича в C^n, $n \geqslant 2$.

1. $B_D(\lambda, \alpha, \beta) \sim B_D(\lambda, 0, \beta)$;
2. $B_D(\lambda, \alpha, \beta) \subseteq B_D(\lambda, 0, \beta) \equiv MS_D(\lambda, \beta)$;
3. $B_D(\lambda, \alpha, \beta) \subset B_D(\lambda, \alpha_1, \beta)$, $0 < \alpha_1 \alpha$;
4. $B_D\left(\frac{e^{i\lambda}}{\alpha}, \beta\right) \sim B_D(\lambda, \alpha, \beta)$;
5. $B_D\left(\frac{e^{i\lambda}}{\alpha}, \beta\right) \sim B_D(\lambda, 0, \beta)$;
6. $M_D(\beta) \sim B_D(\lambda, 0, \beta)$;
7. $B_D(\lambda, 0, \beta) \sim B_D(\lambda, \alpha, \beta)$.

Литература

1. *Базилевич И. Е.* Обобщение одной интегральной формулы для подкласса однолистных функций // Мат. сб.—1964.—Т. 64, № 103.—С. 628–630.
2. *Султыгов М. Д.* Класс голоморфных функций $B_D(\alpha, \beta, \sigma)$ и свойства этого класса // Анал. функц. и их прил.—Орджоникидзе, 1984.—С. 71–80.
3. *Султыгов М. Д.* Интегральные представления голоморфных функций в пространстве C^n, $n \geqslant 2$ // Тез. докл. II междунар. конф.—М., 2003.—С.102–104.
4. *Султыгов М. Д.* Классы спиралеобразных функций двух комплексных переменных // Сб. науч. тр. ИнгГУ.—Магас, 2002.—№ 1.—С. 486–501.
5. *Хохлов Ю. Е.* О функциях Мокану и Базилевича нескольких комплексных переменных // Тр. семинара по краевым задачам.—Казань: Казанский ГУ, 1978.—Вып. 15.—С. 132–138.
6. *Баврин И. И.* Классы голоморфных функций многих комплексных переменных и экстремальные вопросы для этих классов функций.—М., 1976.—99 с.
7. *Баврин И. И.* Операторы и интегральные представления.—М., 1974.—99 с.

СУЩЕСТВЕННЫЕ И ДИСКРЕТНЫЕ СПЕКТРЫ ОПЕРАТОРА ЭНЕРГИИ ЧЕТЫРЕХ ЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМ В МОДЕЛИ ХАББАРДА

С. М. Ташпулатов

(Узбекистан, Ташкент; ИЯФ АН РУз)

В настоящее время модель Хаббарда является одной из наиболее интенсивно изучаемых многоэлектронных моделей металла [1]. Однако до сих пор имеется мало точных результатов для спектра и волновых функций кристалла, описываемого моделью Хаббарда.

В работе [1] изучался спектр и волновые функции системы двух электронов в кристалле, который описывается гамильтонианом Хаббарда.

В работе [2] изучался спектр и связанные состояния (СС) или антисвязанные состояния (АСС) трехэлектронных систем в кристалле, который описывается гамильтонианом Хаббарда.

В настоящей работе рассматривается оператор энергии четырехэлектронных систем в модели Хаббарда и описывается структура существенного спектра и дискретный спектр системы для квинтетных и синглетных состояниях.

Гамильтониан рассматриваемой модели имеет вид

$$H = A\sum_{m,\gamma} a^+_{m,\gamma} a_{m,\gamma} + B\sum_{m,\tau,\gamma} a^+_{m,\gamma} a_{m+\tau,\gamma} + U\sum_{m} a^+_{m,\uparrow} a_{m,\uparrow} a^+_{m,\downarrow} a_{m,\downarrow},$$

где A — энергия электрона в узле решетке, B — интеграл переноса между соседними узлами ($B > 0$; $\tau = \pm e_j, j = 1, 2, \ldots, \nu$, где e_j — единичные орты; U — параметр кулоновского взаимодействия двух электронов на одном узле, γ — спиновый индекс ($\uparrow$ или $\downarrow$), а $a^+_{m,\gamma}$ и $a_{m,\gamma}$ соответственно, операторы рождения и уничтожения электрона в узле $m \in Z^\nu$, через $\uparrow$ и $\downarrow$ обозначены значения спина $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$.

Гамильтониан H действует в антисимметрическом пространстве Фока $\mathcal{H}_{as}$. Пусть φ_0 — вакуумный вектор в пространстве $\mathcal{H}_{as}$. Квинтетное состояние соответствует свободному движению четырех электронов на решетке со следующими базисными функциями: $k^2_{p,q,r,t} = a^+_{p\uparrow} a^+_{q\uparrow} a^+_{r\uparrow} a^+_{t\uparrow}\varphi_0$. Подпространство $\mathcal{H}^k_4$, соответствующее квинтетному состоянию, состоит из множества всех векторов вида $\psi = \sum_{p,q,r,t\in Z^\nu} f(p,q,r,t) k^2_{p,q,r,t}$, $f \in l^{as}_2$, где l^{as}_2 — пространство антисимметричных функций из $l_2((Z^\nu)^4)$.

Теорема 1. *Пространство $\mathcal{H}^k_4$ инвариантно относительно оператора H. Оператор $H^k_4 = H/_{\mathcal{H}^k_4}$ является ограниченным самосопряженным оператором. Он порождает ограниченный самосопряженный оператор $\overline{H}^k_4$. В квазиимпульсном представлении оператор $\overline{H}^k_4$ действует в гильбертовом пространстве $L^{as}_2((T^\nu)^4)$ по формуле $\widetilde{H}^k_4 \widetilde{f}(\lambda;\mu;\gamma;\theta) = h(\lambda;\mu;\gamma;\theta)\widetilde{f}(\lambda;\mu;\gamma;\theta)$, где $\widetilde{f} \in L^{as}_2((T^\nu)^4)$, L^{as}_2 — подпространство антисимметричных функций из $L_2((T^\nu)^4)$ и $h(\lambda;\mu;\gamma;\theta) = 4A + 2B\sum_{i=1}^{\nu}(\cos\lambda_i + \cos\mu_i + \cos\gamma_i + \cos\theta_i)$.*

Очевидно, что спектр оператора $\widetilde{H}_4^k$ чисто непрерывен и совпадает с множеством значений функции $h(\lambda;\mu;\gamma;\theta)$.

В системе имеется два синглетных состояний, со следующими базисными функциями: ${}^1s^0_{p,q,r,t} = a^+_{p\uparrow}a^+_{q\uparrow}a^+_{r\downarrow}a^+_{t\downarrow}\varphi_0$ и ${}^2s^0_{p,q,r,t} = a^+_{p\uparrow}a^+_{q\downarrow}a^+_{r\uparrow}a^+_{t\downarrow}\varphi_0$. Подпространство ${}^1\mathcal{H}_4^s$, соответствующее первому синглетному состоянию, состоит из множества всех векторов вида $\psi = \sum_{p,q,r,t\in Z^\nu} f(p,q,r,t)^1 s^0_{p,q,r,t}$, $f \in l_2^{as}$.

Теорема 2. *Пространство ${}^1\mathcal{H}_4^s$ инвариантно относительно оператора H. Оператор ${}^1H_4^s = H/_{{}^1\mathcal{H}_4^s}$ является ограниченным самосопряженным оператором. В квазиимпульсном представлении оператор ${}^1H_4^s$ действует в гильбертовом пространстве $L_2^{as}((T^\nu)^4)$.*

Теорема 3. *Если $\nu = 1,2,3$ и $U > 0$, то существенный спектр оператора первого синглета $\widetilde{{}^1H}_4^s$ состоит из объединения не более трех отрезков, а дискретный спектр первого синглета состоит из единственной точки (существует единственная АСС), лежащий ниже области существенного спектра системы.*

Теорема 4. *Если $\nu = 1,2,3$ и $U < 0$, то существенный спектр оператора второго синглета $\widetilde{{}^2H}_4^s$ состоит из объединения не более трех отрезков, а дискретный спектр второго синглета состоит из единственной точки (существует единственная СС), лежащий ниже области существенного спектра системы.*

Литература

1. *Карпенко Б. В., Дякин В. В., Будрина Г. Л.* Два электрона в модели Хаббарда // Физика металлов и металловедение.—1986.—Т. 61, № 4.—С. 702–706.
2. *Ташпулатов С. М.* О спектральных свойствах трехэлектронных систем в модели Хаббарда // Теорет. и мат. физика.—2014.—Т. 179, № 3.—С. 387–405.

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА РАЗДЕЛЕННОЙ РАЗНОСТИ ПО НЕТОЧНО ЗАДАННЫМ РАЗНОСТЯМ

С. А. Унучек

(Россия, Москва; МГУ ИТРЭ)

Основные понятия

Рассмотрим пространство $l_{2,h}(\mathbb{Z})$, $h > 0$, всех последовательностей $x = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ таких, что $\|x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} = \big(h\sum_{j\in\mathbb{Z}}|x_j|^2\big)^{1/2} < \infty$.

Пусть $n \in \mathbf{N}$. Предположим, что для каждой последовательности $x \in l_{2,h}(\mathbb{Z})$ неточно известны разделенные разности $k_1, k_2, \ldots, k_n$ порядков ($0 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_n$), т. е. известны последовательности $y_1, y_2, \ldots, y_n$ такие, что $\|\Delta_h^{k_j}x - y_j\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leqslant \delta_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Рассмотрим задачу оптимального восстановления оператора k-й разделенной разности $\Delta_h^k x$ ($0 \leqslant k \leqslant k_n$) последовательности $x \in l_{2,h}(\mathbb{Z})$. В качестве методов восстановления рассмотрим всевозможные отображения $m : (l_{2,h}(\mathbb{Z}))^n \to l_{2,h}(\mathbb{Z})$. Погрешностью метода m называется величина

$$e\big(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \overline{K}, \overline{\delta}, m\big) = \sup_{\substack{x\in l_{2,h}(\mathbb{Z}),\\ \overline{Y}\in(l_{2,h}(\mathbb{Z}))^n,\\ \|\Delta_h^{k_j}x-y_j\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}\leqslant\delta_j,\, j=1,\ldots,n}} \big\|\Delta_h^k x - m(\overline{Y})\big\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})},$$

где $\overline{K} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$, $\overline{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$, $\overline{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E\big(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \overline{K}, \overline{\delta}\big) = \inf_{m:(l_{2,h}(\mathbb{Z}))^n\to l_{2,h}(\mathbb{Z})} e\big(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \overline{K}, \overline{\delta}, m\big).$$

Метод $\widehat{m}$, на котором достигается нижняя грань, будем называть оптимальным методом.

Основные результаты

Пусть $k, k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots \leqslant k_n$, $0 \leqslant k \leqslant k_n$ и $\delta > 0$.

Положим $M = \operatorname{co}\big\{(k_j, \ln 1/\delta_j), 1 \leqslant j \leqslant n\big\} + \big\{(t, t\ln\frac{h}{2}) : t \geqslant 0\big\}$, где $\operatorname{co} A$ обозначает выпуклую оболочку множества A. Пусть функция $\theta(\cdot)$ на промежутке $[0, +\infty)$ задана равенством $\theta(k) = \max\{x : (k, x) \in M\}$, причем $\theta(k) = -\infty$, если $(k, x) \notin M$, $\forall\, x$. На промежутке $[k_1, +\infty)$ функция $\theta(\cdot)$ — вогнутая ломаная. Пусть $k_{s_1}, k_{s_2}, \ldots k_{s_r}$ — ее точки излома, $k_{s_1} = k_1$, и $k_{s_1}, k_{s_2}, \ldots k_{s_r}$ — подмножество точек $k_1, k_2, \ldots k_n$.

Теорема 1. *Для любого* $k \geqslant 0$ *погрешность оптимального восстановления равна*

$$E\big(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \overline{K}, \overline{\delta}\,\big) = e^{-\theta(k)}. \qquad (1)$$

Построено семейство оптимальных методов.

Литература

1. *Смоляк С. А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук.—М.: МГУ, 1965.
2. *Колмогоров А. Н.* Избранные труды. Математика и механика.—М.: Наука, 1985.
3. *Никольский С. М.* К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами // Успехи мат. наук.—1950.—Т. 5, № 2.—С. 165–177.
4. *Марчук А. Г., Осипенко К. Ю.* Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек // Мат. заметки.—1975.—Т. 17, № 3.—С. 359–368.
5. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям // Мат. сб.—2009.—Т. 200, № 5.—С. 37–54.
6. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Как наилучшим образом восстановить функцию по неточно заданному спектру // Мат. заметки.—2012.—Т. 92, № 1.—С. 59–67.

К РЕШЕНИЮ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФАКТОРИЗОВАННОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Е. А. Уткина

(Россия, Казань; КФУ)

В области $D = \{0 < x, y < 1\}$ рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)(u_{xy} + au_x + bu_y + cu) = 0, \tag{1}$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям $a \in C^{1,0}(\overline{D})$, $b \in C^{0,1}(\overline{D})$, $c \in C^{0,0}(\overline{D})$. Это уравнение относится к одному из канонических видов, приведенных в [1].

Задача. Найти в D функцию $u \in C^{2,1}(D) \cap C^{1,2}(D) \cap C(\overline{D}) \cap C^{1,0}(D \cup D_1) \cap C^{0,1}(D \cup D_2)$, $D_1 = \{(0, y); y \in [0, 1]\}$, $D_2 = \{(x, 0); x \in [0, 1]\}$, являющуюся решением уравнения (1), и удовлетворяющую условиям

$$u(0, y) = \varphi(y), \quad u(x, 0) = \psi(x), \tag{2}$$

$$u_x(0, y) = \varphi_1(y), \quad u_y(x, 0) = \psi_1(x), \varphi(0) = \psi(0), \tag{3}$$

$$\varphi_1(0) = \psi'(0), \quad \psi_1(0) = \varphi'(0), \quad \psi_1'(0) = \varphi_1'(0),$$

$$\varphi, \varphi_1, \psi, \psi_1 \in C^2[0, 1].$$

Запишем сначала (1) в виде $u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f$, где f — решение уравнения $f_x + f_y = 0$. Следовательно,

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = \omega(x - y), \tag{4}$$

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = \omega(\xi), \quad -1 \leqslant \xi \leqslant 1, \tag{5}$$

с условиями (2), (3) и неизвестной правой частью $\omega(\xi)$.

Для нахождения $\omega(\xi)$положим в (3) сначала $y = 0$ и получим соотношение

$$\psi_1'(x) + a(x, 0)\psi'(x) + b(x, 0)\psi_1(x) + c(x, 0)\psi(x) = \omega(x), \tag{6}$$

$$0 \leqslant x \leqslant 1.$$

А затем считаем $x = 0$ и получим

$$\varphi_1'(y) + a(0, y)\varphi_1(y) + b(0, y)\varphi'(y) + c(0, y)\varphi(y) = \omega(-y), \tag{7}$$

$$-1 \leqslant -y \leqslant 0.$$

Причем левые части в записанных соотношениях полностью известны и определяются через коэффициенты (1) и условия (2), (3). А $\omega(+0)$ и $\omega(-0)$, определенные из (5) и (7) совпадают. Это означает, что правая часть (4) тоже полностью известна. Отметим, что обсуждаемая задача с условиями (2), (3) ранее рассматривалась в [2], но автор в предлагаемой заметке добавил к (3) еще три условия согласования и существенно упростил рассуждения из [2], отыскивая предложенным способом функцию ω.

Итак, теперь требуется решить задачу Гурса для (4) с условиями (2) и условием согласования $\varphi(0) = \psi(0)$. Понятно, что данная постановка включает в себя хорошо известную [3, с. 177] задачу Гурса для уравнения (3) с условиями (2) и для ее решения можно применить формулу (47) из [3]. Последнюю мы здесь не приводим, чтобы чрезмерно не увеличивать объем заметки.

Литература

1. *Джураев Т. Д., Попелек Я.* О канонических видах уравнений с частными производными 3-го порядка // Успехи мат. наук.—1989.—Т. 44, вып. 4.—С. 237–238.
2. *Жегалов В. И., Миронов А. Н., Уткина Е. А.* Уравнения с доминирующей частной производной.—Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014.—385 с.
3. *Бицадзе А. В.* Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1976.—296 с.

ORDER VERSIONS OF THE HAHN–BANACH THEOREMS: CONSTRUCTION OF ENVELOPES[1]

B. N. Khabibullin (Russian, Ufa; BashSU),
F. B. Khabibullin (Russian, Ufa; BashSU)

One of classical forms of the Hahn–Banach Theorems for vector spaces X over a field $\mathbb{R}$ of real numbers is the following statement: *every sublinear function* $f\colon X\to\mathbb{R}$ *is equal to a pointwise precise greatest lower bound of all linear functions* $\varphi\in X\to\mathbb{R}$ *majorized by* f, *i. e.* $\varphi(x)\leqslant f(x)$ *for all* $x\in X$. We investigate general statements.

1. Ordered sets. Order completion. Let S be a set with a (*partial*) *order* $\leqslant$ (reflexive, transitive, antisymmetric) on S, i. e. a pair $(S,\leqslant)$. The pair $(S,\leqslant)$ or set S is *lower* (*upper* resp.) *complete* if for every non-empty subset $S_0\subset S$ there exists *greatest lower* (*least upper* resp.) *bound* $\inf S_0$ ($\sup S_0$ resp.). S is *complete*, if S is lower and upper complete. A subset $S_0\subset S$ is *bounded below* (*above* resp.) if there is $s_0\in S$ such that $s_0\leqslant s$ ($s\leqslant s_0$ resp.) for all $s\in S_0$. The set S is *lower* (*upper* resp.) *order-complete* [1–2] if for each non-empty bounded below (above resp.) subset $S_0\subset S$ there is $\sup S_0\in S$ ($\inf S_0\in S$ resp.). S is *order-complete* if S is lower and upper order-complete. Let S be an order-complete set. If does not exist $\inf S$ and/or $\sup S$, then it is often convenient and it is useful to make operation of (semi-) completion of order-complete set S to a complete set by adding of symbols $\inf S$ and/or $\sup S$ when those elements do not exist initially in S. For pair existing elements $\inf S\in S$ and/or $\sup S\in S$ or added symbols $\inf S\notin S$ and/or $\sup S\notin S$ we use pair of designations $-\infty$ and/or $+\infty$ by analogy to expansions of the real axis $\mathbb{R}$ downwards (to the left) and/or upwards (to the right). More particularly, under designations from [1], $S_\bullet:=\{-\infty\}\cup S$ is *semi-completion* of S *downwards* (to the left), $S^\bullet:=S\cup\{+\infty\}$ is *semi-completion* of S *upwards* (to the right), $S_\bullet^\bullet:=S_\bullet\cup S^\bullet$ is *completion* of S, where order $\leqslant$ is extended by a natural way on these completions, i. e. $-\infty\leqslant s\leqslant+\infty$ *for any elements* $s\in S_\bullet^\bullet$. Evidently, the completions $S_\bullet^\bullet, S_\bullet, S^\bullet$ with such order relation are complete, lower complete and upper complete ordered set. In the notation $\varnothing$ for the empty subset

$$\sup\varnothing:=-\infty\quad\text{for}\quad\varnothing\subset S_\bullet,S_\bullet^\bullet,\quad\inf\varnothing:=+\infty\quad\text{for}\quad\varnothing\subset S_\bullet^\bullet,S^\bullet.$$

2. Upper and lower envelopes. Let X,Y are sets. As usual, we denote by Y^X the set of all *functions* (mappings, operators, functionals, forms etc.) $f\colon X\to Y$ or $f\colon x\mapsto f(x)$, $x\in X$.

Let $f,\varphi\in Y^X$. If $\varphi(x)=f(x)$ *for all* $x\in X$ then we write $\varphi=f$ or $f=\varphi$ *on* X and we say that φ *is equal to* f *on* X. Let $Y=S_\bullet^\bullet$ be the completion of order-complete set $(S,\leqslant)$. If $\varphi(x)\leqslant f(x)$ *for all* $x\in X$ then we write $\varphi\leqslant f$ *on* X and we say that f *is minorized by* φ *on* X or φ *is majorised by* f *on* X. The relation

[1]Supported from Russian Foundation for Basic Research, project № 13–01–00030a.

"$f \leqslant \varphi$ *on* X" defines *the relation of a pointwise order on* $(S_{\bullet}^{\bullet})^X$ denoted by the same symbol $\leqslant$ further. Evidently, the set $(S_{\bullet}^{\bullet})^X$ with such pointwise order is *complete.* Let $(S, \leqslant)$ be a order-complete order set, $f \in (S_{\bullet}^{\bullet})^X$, $\Phi \subset (S_{\bullet}^{\bullet})^X$. *The lower* (*upper* resp.) Φ-*envelope on* X *for* f is the function

$$\begin{gathered}\mathrm{le}_{\Phi}^{f}\colon x \mapsto \sup\bigl\{\varphi(x)\colon \Phi \ni \varphi \leqslant f \text{ on } X\bigr\} \in S_{\bullet}^{\bullet}, \quad x \in X\\ \bigl(\mathrm{ue}_{f}^{\Phi}\colon s \mapsto \inf\bigl\{\varphi(s)\colon f \leqslant \varphi \in \Phi \text{ on } X\bigr\} \in S_{\bullet}^{\bullet}, \quad x \in X \text{ resp.}\bigr).\end{gathered}$$

The case $S = \mathbb{R}$ is most often used in applications.

3. Statements of problems (see various algebraic versions also in [3])**.**

I. *To describe whenever possible a largest class of functions* $f \in (S_{\bullet}^{\bullet})^X$ *equal to one of* Φ*-envelopes on* X *in terms of* Φ, S, *and* X.

II. *To give to some extent explicit construction of* Φ*-envelopes* le_{Φ}^{f} *and* ue_{f}^{Φ} *on* X *in terms of* f, Φ, S, *and* X.

See some applications of these problems to various questions of the theory of functions of complex variables and potential theory in [4].

References

1. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциальное исчисление. Теория и приложения.—М.: Наука, 2007.—560 с.
2. *Simons S.* From Hahn–Banach to Monotonicity.—Berlin: Springer, 2008.—264 p.—(Lect. Notes in Math.; Vol. 1963).
3. *Хабибуллин Б. Н.* Аналоги теоремы Хана — Банаха для (полу)групп: построение нижней огибающей // Алгебра и математическая логика: теория и приложения: Сб. тез. докл. междунар. конф.—Казань: КФУ, 2014.—С. 75–76.
4. *Хабибуллин Б. Н.* Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. I // Изв. РАН. Сер. мат.—2001.—Т. 65.—№ 4—С. 205–224.

О РАЗЛОЖЕНИИ ОДНОГО КЛАССА ГРУПП ОПЕРАТОРОВ

Чшиев А. Г.
(Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Пусть X — комплексное банахово пространство, $\operatorname{End} X$ — банахова алгебра линейных ограниченный операторов, действующих в X. Через $L^1(\mathbb{R})$ обозначим банахову алгебру всех суммируемых на $\mathbb{R}$ комплексных функций со сверткой функций в качестве умножения и нормой

$$\|f\|_1 = \int\limits_{\mathbb{R}} |f(t)|\,dt, \quad f \in L^1(\mathbb{R}).$$

Через $\widehat{f}$ обозначим преобразование Фурье функции $f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\widehat{f}(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Определение. Спектром Берлинга вектора $x \in X$ называется множество $\mathcal{A}(x)$ из $\mathbb{R}$, являющееся дополнением в $\mathbb{R}$ к множеству $\{\lambda \in \mathbb{R} :$ существует функция $f \in L^1(\mathbb{R})$ такая, что $\widehat{f}(\lambda) \neq 0$ и $fx = 0\}$, или, что эквивалентно, множество $\{\lambda \in \mathbb{R} : fx \neq 0$ для любой $f \in L^1(\mathbb{R})$ с $\widehat{f}(\lambda) \neq 0\}$.

Пусть $X = C_{bu}(\mathbb{R})$ — комплексное банахово пространство непрерывных равномерно ограниченных функций на $\mathbb{R}$, $\operatorname{End} X$ — банахова алгебра линейных ограниченный операторов, действующих в X. Рассмотрим в пространстве X оператор дифференцирования $D = \frac{d}{dt}$. Пусть $A = i^{-1}D$. Так как $\sigma(D) = i\mathbb{R}$, то $\sigma(A) = \mathbb{R}$. Известно, что оператор $iA : D(A) \subset X \to X$ есть инфинитезимальный оператор сильно непрерывной изометрической группы сдвигов

$$S: \ \mathbb{R} \to \operatorname{End} X, \ (S(t)x)(\tau) = x(\tau + t), \quad \tau, t \in \mathbb{R}.$$

Теорема. *Для любого $a > 0$ инфинитезимальный оператор $iA : D(A) \subset X \to X$ сильно непрерывной группы сдвигов S разложим (по Фояшу) в алгебраическую сумму*

$$iA = iA_- + iA_0 + iA_+,$$

где iA_-, iA_0, iA_+ — сужения оператора iA на инвариантные подпространства X_-, X_0, X_+, соответственно. Кроме того,

1) *оператор A_- является инфинитезимальным оператором сильно непрерывной сжимающей полугруппы операторов $T_- : [0; \infty) \to \operatorname{End} X_-$, причем $\sigma(A_-) \subset (-\infty; a]$;*

2) *оператор A_0 является инфинитезимальным оператором ограниченной сильно непрерывной группы операторов $T_0 : \mathbb{R} \to \operatorname{End} X_0$, причем $\sigma(A_0) \subset [-a; a]$;*

3) *оператор* $-A_+$ *является инфинитезимальным оператором сильно непрерывной сжимающей полугруппы операторов* $T_+ : [0;\infty) \to \operatorname{End} X_+$, *причем* $\sigma(-A_-) \subset (-\infty; a]$.

Замечание. Ситуация принципиально не меняется, если вместо оператора дифференцирования $iA = D = \frac{d}{dt}$ взять генератор сильно непрерывной изометрической группы операторов в пространстве $X = C_{bu}(\mathbb{R})$. В этом случае $\sigma(iA) = i\mathbb{R}$, поэтому $\sigma(A) = \mathbb{R}$. Повторяя вышеприведенные рассуждения, получим аналог теоремы, в которой оператор iA — генератор сильно непрерывной изометрической группы операторов.

Литература

1. *Баскаков А. Г.* Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов // Функцион. анализ, СМФН.—2004.— № 9.—С. 3–151.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РЯДЫ СО СКЛЕИВАЮЩИМИСЯ НА КОНЦАХ ЧАСТИЧНЫМИ СУММАМИ И ИХ АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА

Т. И. Шарапудинов

(Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Рассмотрена задача о конструировании полиномиального оператора $\mathcal{X}_{m,N}(f) = \mathcal{X}_{m,N}(f,x)$, действующего в пространстве $C[-1,1]$, основанного на использовании лишь дискретных значений функции $f(x)$, заданных в узлах равномерной сетки $H_{\mathcal{A}} = \{-1+jh\}_{j=0}^{\mathcal{A}-1} \subset [-1,1]$, $\mathcal{A} = n+2r$, который может быть использован в задаче об одновременном приближении дифференцируемой функции $f(x)$ и ее нескольких производных $f'(x),\dots,f^{(p)}(x)$. Построение операторов $\mathcal{X}_{m,N}(f)$ основано на полиномах Чебышева $T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$ $(0 \leqslant n \leqslant N-1)$, образующих ортогональную систему на множестве $\Omega_N = \{0,1,\dots,N-1\}$ с весом

$$\mu(x) = \mu(x;\alpha,\beta,N) = c\,\frac{\Gamma(x+\beta+1)\Gamma(N-x+\alpha)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)},$$

т. е.

$$\sum_{x\in\Omega_N} \mu(x) T_n^{\alpha,\beta}(x,N) T_m^{\alpha,\beta}(x,N) = h_{n,N}^{\alpha,\beta}\delta_{nm}.$$

Введем следующие обозначения:

$$h = \frac{2}{\mathcal{A}-1}, \quad \psi(x) = \Delta_h^\nu f(x-\nu h).$$

Через $\mathcal{P}_m^{r,\nu}$ обозначим пространство алгебраических полиномов $p_m(x)$ степени m, удовлетворяющих условию

$$\psi(x_j) = p_m(x_j), \quad j \in \{\nu,\dots,r-1\} \cup \{N+r+\nu,\dots,N+2r-1\},$$

$$E_m^{r,\nu}(\psi,N) = \inf_{p_m\in\mathcal{P}_m^{r,\nu}} \max_{j\in\Omega_{\mathcal{A}}} \frac{|\psi(x_j)-p_m(x_j)|}{\left(\sqrt{1-x_j^2}+\frac{1}{m}\right)^{r-\nu}}.$$

Теорема. *Пусть* $r \geqslant 1$, $0 \leqslant \nu \leqslant r-1$, $a>0$, $1 \leqslant n \leqslant a\sqrt{N}$, $m = n+2r-\nu$. *Тогда имеет место оценка*

$$\frac{|\Delta_h^\nu f(x_{j-\nu}) - \Delta_h^\nu \mathcal{X}_{n+2r,N}(f,x_{j-\nu})|}{\left(\sqrt{1-x_{j-\nu}^2}+\frac{1}{n}\right)^{r-\nu-\frac{1}{2}}} \leqslant$$

$$\leqslant c(r,a) E_m^{r,\nu}(\psi,N) \left(1 + \left(\sqrt{1-x_{j-\nu}^2}+\frac{1}{n}\right)^{1/2} \ln\left(n\sqrt{1-x_{j-\nu}^2}+1\right)\right).$$

Литература

1. *Шарапудинов И. И.* Многочлены, ортогональные на дискретных сетках.—Махачкала: Изд-во Дагест. гос. пед. ун-та, 1997.
2. *Шарапудинов Т. И.* Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке // Вестн. Дагест. науч. центра РАН.—2007.—Т. 29.—С. 12–23.

О СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ОПЕРАТОРОВ БЕРНШТЕЙНА — КАНТОРОВИЧА В ПРОСТРАНСТВАХ $L^{p(x)}(E)$

Т. Н. Шах-Эмиров

(Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Пусть $p = p(x) \geqslant 1$ — измеримая и существенно ограниченная функция, $E = [0,1]$. Через $L^{p(x)}(E)$ обозначим пространство измеримых функций $f = f(x)$ таких, что

$$\int\limits_E \left|f(x)\right|^{p(x)} dx < \infty.$$

Из [1] известно, что пространство $L^{p(x)}(E)$ нормируемо при $p(x) \geqslant 1$ и одна из эквивалентных норм вводится следующим образом:

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \|f\|_{p(\cdot)}(E) = \|f\|_{p(\cdot)}(E) = \inf\left\{\alpha > 0 : \int\limits_E \left|\frac{f(x)}{\alpha}\right|^{p(x)} dx \leqslant 1\right\}.$$

Пусть $f(x)$ — суммируемая на [0,1] функция, определим тогда оператор Бернштейна — Канторовича следующим образом:

$$K_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x)(n+1) \int\limits_{\Delta_{nk}} f(t)\,dt,$$

где $\Delta_{nk} = [\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1}]$, $n \in \mathbb{N}$.

В настоящей работе исследуется вопрос сходимости последовательности операторов Бернштейна — Канторовича $\{K_n(f,x)\}_{n=1}^{\infty}$ к функции $f \in L^{p(x)}([0,1])$.

Литература

1. *Шарапудинов И. И.* О топологии пространства $L^{p(t)}([0,1])$ // Мат. заметки.—1979.—Т. 26, № 4.—С. 613–632.

НЕКОММУТАТИВНАЯ ВЕРСИЯ ТЕОРЕМЫ РАДОНА — НИКОДИМА[1]

Я. В. Эльсаев
(Россия, Грозный; ЧГУ)

Введение

Теория модулей над инволютивными топологическими алгебрами является активно развивающейся областью современной математики, находящейся на стыке многих высокоразвитых дисциплин. В последние годы в поле зрения исследователей оказались вполне положительные отображения, действующие в таких модулях [1–3]. В данной заметке мы сформулируем некоммутативную версию теоремы Радона — Никодима для ковариантных, относительно действия локально компактной группы, вполне положительных отображений, заданных на гильбертовом $C^\star$-модуле.

Предварительные сведения

Здесь мы приведем некоторые предварительные сведения, необходимые для дальнейшего. Цель настоящего параграфа — зафиксировать терминологию, обозначения и ввести требуемые понятия. Все необходимые сведения о $C^\star$-алгебрах и гильбертовых $C^\star$-модулях можно найти в [4]. Все алгебры рассматриваются над полем комплексных чисел. Пусть A это C^*-алгебра. Через $M_n(A)$ обозначим $\star$-алгебру всех матриц над алгеброй A, где сложение и умножение матриц, а также умножение на элемент основного поля задаются также, как и в случае скалярных матриц. Линейное отбражение $\varphi : A \to B$ $C^\star$-алгебр называется *вполне положительным*, если линейное отображение $\varphi^n : M_n(A) \to M_n(B)$, заданное формулой

$$\varphi^n\big([a_{ij}]_{i,j=1}^n\big) = \big[\varphi(a_{ij})\big]_{i,j=1}^n$$

является положительным для всех $n \in \mathbb{N}$.

Предгильбертовым A-модулем называется комплексное векторное пространство V которое также является правым A-модулем, снабженное полуторалинейной формой $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to A$, удовлетворяющее свойствам

$$\langle x, x\rangle \geqslant 0 \quad \text{для любого} \quad x \in V; \tag{1}$$

$$\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{для любого} \quad x \in V; \tag{2}$$

$$\langle x, y\rangle^\star = \langle y, x\rangle \quad \text{для любых} \quad x, y \in V; \tag{3}$$

$$\langle x, ya\rangle = \langle y, x\rangle a \quad \text{для любых} \quad x, y \in V;\ a \in A. \tag{4}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 14-31-50416.

Будем говорить, что V это *гильбертов* A-модуль, или гильбертов C^*-модуль, если V полон, как нормированное пространство, относительно топологии, задаваемой нормой

$$\|x\|_V = \sqrt{\|\langle x, x\rangle\|_A}, \quad x \in V.$$

Результат

Следующая теорема является некоммутативной версией теоремы Радона — Никодима.

Теорема 1. *Пусть Φ, Ψ — вполне положительные отображения, заданные на гильбертовом $C^\star$-модуле E со значениями в $L(H, K)$ и $\Psi \preceq \Phi$. Тогда существует однозначно определенный положительный линейный оператор Δ_Ψ^Φ в коммутанте $(\pi^\Phi(E)')_G$ такой, что $\Psi \sim \Phi_{\sqrt{\Delta_\Phi^\Psi}}$.*

Литература

1. *Малиев И. Н., Плиев М. А.* О представлении типа Стайнспринга для операторов в гильбертовых модулях над локальными $C^\star$-алгебрами // Изв. вузов. Математика.—2012, № 12.—С. 51–58.
2. *Плиев М. А., Цопанов И. Д.* О представлении типа Стайнспринга для n-наборов вполне положительных отображений в гильбертовых $C^\star$-модулях // Изв. вузов. Математика.—2014.—№ 11.—С. 1–8.
3. *Asadi M. D.* Stinspring's theorem for Hilbert $C^\star$-modules // J. Operator Theory.—2009.—Vol. 62, № 2.—P. 235–238.
4. *Мануйлов В. М., Троицкий Е. В.* $C^\star$-гильбертовы модули.—М.: Факториал, 2001.

Секция II

Дифференциальные уравнения и интегральные уравнения

ON TOPOLOGICAL STRUCTURE OF SOME SETS RELATED TO THE NORMALIZED RICCI FLOW ON GENERALIZED WALLACH SPACES[1]

N. A. Abiev

(Kazakhstan, Taraz; TarSU)

It is known that determining the connectedness (or the number of connected components) of real algebraic surfaces is a very hard classical problem in algebraic geometry (see e. g. [3–5]). Here we deal with similar problems relating to the normalized Ricci flows on generalized Wallach spaces (see [1, 2] and references therein for details). The importance of such problems is due to the need to develop a special approach for studying general properties of degenerate singular points of Ricci flows. More concretely, in [1, 2] the authors considered some problems concerning the topological structure of the sets $(0,1/2)^3 \cap \Omega$ and $(0,1/2)^3 \setminus \Omega$, where $\Omega = \{(a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, Q(a_1,a_2,a_3) = 0\}$ is an algebraic surface in $\mathbb{R}^3$ defined by a symmetric polynomial $Q(a_1,a_2,a_3)$ in a_1,a_2,a_3 of degree 12:

$$\begin{gathered}
Q(a_1,a_2,a_3) = (2s_1+4s_3-1)\big(64s_1^5-64s_1^4+8s_1^3+12s_1^2-6s_1+1+\\
+240s_3s_1^2-240s_3s_1-1536s_3^2s_1-4096s_3^3+60s_3+768s_3^2\big)-\\
-8(2s_1+4s_3-1)(2s_1-32s_3-1)(10s_1+32s_3-5)s_1s_2-\\
-16\big(13-52s_1+640s_3s_1+1024s_3^2-320s_3+52s_1^2\big)s_1^2s_2^2+\\
+64(2s_1-1)(2s_1-32s_3-1)s_2^3+2048(2s_1-1)s_1s_2^4,\\
s_1 = a_1+a_2+a_3, \quad s_2 = a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3, \quad s_3 = a_1a_2a_3.
\end{gathered}$$

The main result of this work is contained in the following theorem.

Theorem 1. *The following assertions hold with respect to the standard topology of* $\mathbb{R}^3$*:*

1) *the set* $(0,1/2)^3 \cap \Omega$ *is connected;*
2) *the set* $(0,1/2)^3 \setminus \Omega$ *consists of three connected components.*

The author is indebted to Prof. Yu. G. Nikonorov and to Prof. A. Arvanitoyeorgos for helpful discussions.

References

1. *Abiev N. A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Yu. G., Siasos P.* The dynamics of the Ricci flow on generalized Wallach spaces // Differential Geometry and its Applications.—2014.—Vol. 35 (Supplement).—P. 26–43.

[1]The research was supported by Grant 1452/GF4 of Ministry of Education and Sciences of the Republic of Kazakhstan for 2015–2017 (Agreement № 299, February 12, 2015).

2. *Abiev N. A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Yu. G., Siasos P.* The Ricci flow on some generalized Wallach spaces // Geometry and its Applications. Springer Proceedings in Mathematics.—Vol. 72.—Switzerland: Springer, 2014.—P. 3–37.
3. *Basu S., Pollack R., Roy M.-F.* Algorithms in Real Algebraic Geometry. Algorithms and Computation in Mathematics.—Vol. 10.—Berlin: Springer–Verlag, 2006.—662 p.
4. *Bruce J. W., Giblin P. J.* Curves and singularities. A geometrical introduction to singularity theory.—Cambridge: Cambridge University Press, 1984.—222 p.
5. *Silhol R.* Real Algebraic Surfaces. Lecture notes in Mathematics, 1392.—Berlin: Springer–Verlag, 1989.—215 p.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЯДРАМИ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА НА ОТРЕЗКЕ[1]

С. Н. Асхабов

(Россия, Грозный; ЧГУ)

1. В [1] доказаны теоремы существования и единственности решения для различных классов нелинейных уравнений, содержащих оператор типа потенциала

$$(I^\alpha u)(x) = \int\limits_a^b \frac{u(s)ds}{|x-s|^{1-\alpha}}, \quad 0<\alpha<1.$$

Рассмотрим вопрос о приближенном решении таких уравнений в $L_2(a,b)$. Особо отметим, что здесь, в отличие от [2], существенно используется свойство потенциальности рассматриваемых операторов, что позволяет улучшить соответствующие оценки скорости сходимости последовательных приближений.

Всюду в этом пункте предполагается, что $\lambda>0$, $f(x)\in L_2(a,b)$, $n\in\mathbb{N}$, а нелинейность $F(x,u)$ почти при каждом фиксированном $x\in[a,b]$ и при любых $u_1,u_2\in\mathbb{R}$ удовлетворяет условиям:

1) $|F(x,u_1)-F(x,u_2)|\leqslant M\cdot|u_1-u_2|$, где $M>0$;
2) $(F(x,u_1)-F(x,u_2))\cdot(u_1-u_2)\geqslant m\cdot|u_1-u_2|^2$, где $m>0$.

Теорема 1. *Если выполнены условия* 1) *и* 2), *то уравнение*

$$F[x,u(x)]+\lambda\int\limits_a^b \frac{u(s)\,ds}{|x-s|^{1-\alpha}} = f(x) \tag{1}$$

имеет единственное решение решение $u^*(x)\in L_2(a,b)$. Это решение можно найти методом итераций по схеме

$$u_n = u_{n-1} - \mu_1\cdot\big(\lambda\cdot Fu_{n-1} + I^\alpha u_{n-1} - f\big),$$

с оценкой погрешности

$$\|u_n-u^*\|_2 \leqslant \mu_1\cdot\frac{\alpha_1^n}{1-\alpha_1}\cdot\big\|\lambda\cdot Fu_0+I^\alpha u_0-f\big\|_2,$$

где $\mu_1 = 2/(M+m+2(b-a)^\alpha\alpha^{-1})$, $\alpha_1=(M-m+2(b-a)^\alpha\alpha^{-1})/(M+m+2(b-a)^\alpha\alpha^{-1})$, $u_0(x)\in L_2(a,b)$ — начальное приближение.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 13-01-00422.

Теорема 2. *Если выполнены условия* 1) *и* 2), *то уравнение*

$$u(x) + \lambda \int\limits_a^b \frac{F[s, u(s)]\, ds}{|x-s|^{1-\alpha}} = f(x) \tag{2}$$

имеет единственное решение $u^*(a,b) \in L_2(a,b)$. *Это решение можно найти методом итераций по схеме*

$$u_n = F^{-1} v_n, \quad v_n = v_{n-1} - \mu_2 \cdot \bigl(F^{-1} v_{n-1} + \lambda \cdot I^\alpha v_{n-1} - f\bigr),$$

с оценкой погрешности

$$\bigl\|u_n - u^*\bigr\|_2 \leqslant \frac{\mu_2}{m} \cdot \frac{\alpha_2^n}{1-\alpha_2} \cdot \bigl\|u_0 + \lambda \cdot I^\alpha F u_0 - f\bigr\|_2,$$

где $\mu_2 = 2/(m^{-1} + m\,M^{-2} + 2\,\lambda \cdot (b-a)^\alpha \alpha^{-1})$, $\alpha_2 = (m^{-1} - m\,M^{-2} + 2\,\lambda \cdot (b-a)^\alpha \alpha^{-1})/(m^{-1} + m\,M^{-2} + 2\,\lambda \cdot (b-a)^\alpha \alpha^{-1})$, F^{-1} — *оператор обратный к* F, $v_0 = F u_0$, $u_0(x) \in L_2(a,b)$ — *начальное приближение.*

2. Теоремы 1 и 2 не охватывают степенные нелинейности и использованные в нем методы не пригодны в случае пространств $L_p(a,b)$ при $p \neq 2$. В последнем случае применим градиентный метод (или метод наискорейшего спуска).

Теорема 3. *Пусть* $p \geqslant 4$ — *четное число и* $p' = p/(p-1)$. *Тогда при любом* $f(x) \in L_{p'}(a,b)$ *уравнение*

$$u^{p-1}(x) + \int\limits_a^b \frac{u(s)}{|s-x|^{1-\alpha}}\, ds = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(a,b)$. *Это решение можно найти методом последовательных приближений по формуле*

$$u_{n+1} = u_n - \delta_n \bigl\|A u_n - f\bigr\|_{p'}^{2-p'} \bigl|A u_n - f\bigr|^{p'-2} \bigl[A u_n - f\bigr],$$

где $u_0(x) \in L_p(a,b)$ — *любая функция,* $Au = u^{p-1} + I^\alpha u$,

$$\delta_n = \min \left\{ 1,\ \frac{2}{\varepsilon + (p-1)\ \bigl(\|u_n\|_p + \|A u_n - f\|_{p'}\bigr)^p + \gamma} \right\},$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$, $\gamma = (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p}\, \|I^\alpha\|_{2/(1+\alpha) \to 1/(2-\alpha)}$, $\varepsilon > 0$.

Литература

1. *Асхабов С. Н.* Нелинейные уравнения типа свертки.—М.: Физматлит, 2009.—304 с.
2. *Асхабов С. Н.* Нелинейные сингулярные иртегральные уравнения в пространствах Лебега.—Грозный: ЧГУ, 2013.—136 с.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С БОЛЬШИМ ПАРАМЕТРОМ

П. В. Бабич
(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

1°. **Прямая задача.**

На прямоугольнике рассматривается параболическая начально-краевая задача с большим параметром:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x)r(t,\omega t), \quad \omega \gg 1, \tag{1}$$

$$u\big|_{\Gamma} = 0. \tag{2}$$

Функции $f(x)$ и $r(t,\tau)$, определенные на множествах $x \in [0,\pi]$, $(t,\tau) \in T = [0,1] \times [0,\infty)$, удовлетворяют следующим условиям: f, r — достаточно гладкие; $f(0) = f(\pi) = f^{(2n)}(0) = f^{(2n)}(\pi) = 0$, $n = 0,1,2$; $r(t,\tau) = r_0(t) + r_1(t,\tau)$, где $r_1(t,\tau)$ имеет нулевое среднее по второй переменной.

Обратная задача состоит в определении функции $r(t,\tau)$, когда известна функция $f(x)$ и значение решения $u_\omega(x,t)$ в некоторой точке $x_0 \in [0,\pi]$. Предварительно исследуем прямую задачу. Точнее, рассмотрим вопрос о построении полной асимптотики решения задачи (1)–(2) при известном источнике $f(x) \cdot r(t,\tau)$.

Асимптотическое разложение решения задачи (1)–(2) будем искать в виде

$$u(x,t,\omega) = u_0(x,t) + \frac{1}{\omega}\big[u_1(x,t) + v_1(x,t,\tau)\big] + \frac{1}{\omega^2}\, v_2(x,t,\tau) + W_\omega(x,t), \quad \omega \gg 1, \tag{3}$$

где $\tau = \omega t$.

Частичное разложение обозначим как $U_\omega(x,t)$:

$$U_\omega(x,t) = u_0(x,t) + \frac{1}{\omega}\big[u_1(x,t) + v_1(x,t,\tau)\big]. \tag{4}$$

Теорема 1. *Частичная сумма $U_\omega(x,t)$ эффективно находится, т. е. ее нахождение сводится к решению конечного числа задач. А так же выполняются следующие равенства:*

$$\big\|W_\omega(x,t)\big\|_C = O\big(\omega^{-2}\big), \tag{5}$$

$$\left\|\frac{\partial W_\omega(x,t)}{\partial t}\right\|_C = O\big(\omega^{-1}\big). \tag{6}$$

2°. Обратная задача.

Сформулируем обратную задачу для системы (1)–(2).

Пусть в начально-краевой задаче (1)–(2) функция $f(x)$ задана, а $r(t,\tau)$ неизвестна, где f и r удовлетворяют условиям пункта 1°. Требуется определить $r(t,\tau)$ такую, что в точке $x = x_0$ решение $u_\omega(x,t,r)$ принимает вид

$$u_\omega(x_0,t,r) = \phi_0(t) + \omega^{-1}\phi_1(t,\omega t) + \nu_\omega(t), \tag{7}$$

где $\phi_0(t)$, $\phi_1(t,\tau)$ удовлетворяют достаточным условиям гладкости по $t \in [0,1]$, $\tau \in [0,\infty)$, $\phi_0|_{t=0} = 0$, $\phi_1|_{t=0} = 0$, а $\|\nu_\omega\| = O(\omega^{-2})$, $\nu'_\omega = O(\omega^{-1})$.

Заметим, что условия, наложенные на ϕ_1, ϕ_2 и ν_ω, выполняются в силу теоремы 1.

Теорема 2. *При указанных выше условиях обратная задача однозначно разрешима.*

Литература

1. *Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи мат. наук.—1962.—Т. 17, № 3.—С. 3–146.
2. *Денисов А. М.* Асимптотика решений обратных задач для гиперболического уравнения с малым параметром при старшей производной // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—2013.—Т. 53, № 5.—С. 744–752.

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ[1]

Д. Ш. Балданов

(Россия, Новосибирск; НГУ)

В настоящей работе рассматривается вопрос об асимптотической устойчивости нулевого решения системы разностных уравнений

$$x_{n+1} = Ax_n + Bx_{n-l}, \quad n = 0, 1, \dots \tag{1}$$

Будем рассматривать систему (1) как систему уравнений с запаздывающим аргументом ($l \in \mathbb{N}$ — параметр запаздывания).

Имеет место следующий результат.

Теорема. *Предположим, что существуют эрмитовы матрицы*

$$H > 0, \quad K_j > 0, \quad j = 0, \dots, l+1,$$

такие, что

$$K_{i+1} - (1-k)K_i \leqslant 0, \quad i = 0, \dots, l, \ k \in (0,1),$$

и составная матрица

$$C = -\begin{pmatrix} A^*HA - H + A^*K_0A & A^*HB + A^*K_0B \\ B^*HA + B^*K_0A & B^*HB + B^*K_0B - K_{l+1} \end{pmatrix}$$

положительно определена. Тогда нулевое решение системы (1) *асимптотически устойчиво и имеет место оценка*

$$\langle Hx_n, x_n \rangle \leqslant (1-\varepsilon)^n \cdot v_0(x),$$

где $\varepsilon = \min\left\{k, \frac{1}{\|C^{-1}\|\,\|H\|}\right\}$.

Доказательство теоремы проводится с использованием функционала типа Ляпунова — Красовского

$$v_n(x) = \langle Hx_n, x_n \rangle + \sum_{j=n-l}^{n} \langle K_{n-j}x_j, x_j \rangle.$$

Этот функционал является дискретным аналогом функционала Ляпунова — Красовского, введенного в работе [1] при изучении асимптотической устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\frac{d}{dt}\,y(t) = Ay(t) + By(t-\tau).$$

Литература

1. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика.—2005.—Т. 5, № 3.—С. 20–28.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 13-01-00329.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ОПЕРАТОРОМ ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ДЖРБАШЯНА — НЕРСЕСЯНА

Ф. Т. Богатырева

(Россия, Нальчик; ИПМА)

В области $\Omega =]0, l[\times]0, T[$, $l \leqslant \infty$, $T \leqslant \infty$, рассмотрим уравнение с переменными коэффициентами

$$u_x(x,y) + a(x) D_{0y}^{\{\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_n\}} u(x,y) + b(x) u(x,y) = f(x,y), \tag{1}$$

где $D_{0y}^{\{\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_n\}}$ — оператор дробного дифференцирования Джрбашяна — Нерсесяна порядка $\alpha = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k - 1 > 0$, $\gamma_k \in]0,1]$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $a(x)$, $b(x)$, $f(x,y)$ — заданные действительные функции.

Оператор дробного дифференцирования Джрбашяна — Нерсесяна порядка α, ассоциированный с последовательностью $\{\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$, определяется соотношением [1]

$$D_{0y}^{\{\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_n\}} u(x,y) = D_{0y}^{\gamma_n - 1} D_{0y}^{\gamma_{n-1}} \ldots\ D_{0y}^{\gamma_1} D_{0y}^{\gamma_0} u(x,y), \tag{2}$$

где D_{0y}^{γ} — оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана — Лиувилля [2].

Задача. В области Ω найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\{\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_j\}} u(x,y) = \psi_j(x), \quad j = \overline{0,\, n-1}, \tag{3}$$

$$u(0,y) = \varphi(y), \tag{4}$$

где $\psi_j(x)$, $\varphi(y)$ — заданные функции.

Оператор дробного дифференцирования Джрбашяна — Нерсесяна введен в работе [1], где была решена задача Коши для уравнения содержащего оператор вида (2).

При $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_n = 1$ уравнение (1) исследовалось в работах [3, 4] в случае переменных коэффициентов, а в [5, 6] в случае постоянных коэффициентов.

Литература

1. *Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б.* Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН АрмССР. Мат.—1968.—Т. 3, № 1.—С. 3–28.
2. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение.—Москва: Физматлит, 2003.—272 с.

3. *Мамчуев М. О.* Краевая задача для уравнения первого порядка с частной производной дробного порядка с переменными коэффициентами // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. акад. наук.—2009.—Т. 11, № 1.—С. 32–35.
4. *Мамчуев М. О.* Краевые задачи для уравнений и систем уравнений с частными производными дробного порядка.—Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2013.—200 с.
5. *Псху А. В.* Решение краевой задачи для уравнения с частными производными дробного порядка // Диф. уравнения.—2003.—Т. 39, № 8.—С. 1092-1099.
6. *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка.—М.: Наука, 2005.—195 с.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1]

А. А. Бондарь

(Россия, Новосибирск; НГУ)

Рассматривается система линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами

$$x_{m+1} = (A(m) + B(m))x_m, \quad m = 0, 1, \dots, \tag{1}$$

где $\{A(m)\}$ — M-периодическая матричная последовательность, т. е. $A(m+M) = A(m)$, $\{B(m)\}$ — M-периодическая матричная последовательность возмущений. Предполагается, что нулевое решение системы

$$y_{m+1} = A(m)y_m, \quad m = 0, 1, \dots,$$

асимптотически устойчиво. Как показано в работе [1], это эквивалентно тому, что краевая задача

$$\begin{cases} H(l) - A(l)^* H(l+1) A(l) = C, \quad C = C^* > 0, \\ H(0) = H(M) > 0, \qquad l = 0, 1, \dots, M-1, \end{cases}$$

имеет единственное решение $H(l) = H^*(l)$, $l = 0, 1, \dots, M$.

Цель данной работы состоит в том, чтобы получить условия на матрицы возмущения $\{B(m)\}$, при которых нулевое решение системы (1) будет также асимптотически устойчиво. Для этого рассмотрим краевую задачу для возмущенного разностного матричного уравнения Ляпунова

$$\begin{cases} \widetilde{H}(l) - (A(l) + B(l))^* \widetilde{H}(l+1)(A(l) + B(l)) = C, \\ \widetilde{H}(0) = \widetilde{H}(M) > 0, \quad l = 0, 1, \dots, M-1, \ C = C^* > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Теорема. *Предположим, что матричная последовательность возмущений $\{B(l)\}$ удовлетворяет условию*

$$\|B(l)\| \leqslant \sqrt{\|A(l)\|^2 + \frac{1}{\|C^{-1/2} H(l+1) C^{-1/2}\|}} - \|A(l)\|, \qquad l = 0, 1, \dots, M-1. \tag{3}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 13-01-00329.

Тогда существует единственное решение $\widetilde{H}(l) = \widetilde{H}^*(l)$, $l = 0, 1, \ldots, M$, *краевой задачи* (2).

Следствие. *Если выполнено условие* (3), *то нулевое решение системы* (1) *асимптотически устойчиво.*

Замечание. Аналогичные результаты в случае, когда $C = I$, были получены в работе [2].

Литература

1. *Айдын К., Булгаков А. Я., Демиденко Г. В.* Числовые характеристики асимптотической устойчивости решений линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн.—2000.—Т. 41, № 6.—С. 1227–1237.
2. *Айдын К., Булгаков А. Я., Демиденко Г. В.* Асимптотическая устойчивость решений возмущенных линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн.—2002.—Т. 43, № 3.—С. 493–507.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ ПОЛНОТЫ И БАЗИСНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПУЧКА ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

А. И. Вагабов

(Россия, Владикавказ; ЮМИ)

1. Рассматривается задача

$$\sum_{0\leqslant k_0+k_1\leqslant n} \lambda^{k_0} a^{k_0k_1}(x)\,\frac{d^{k_1}y}{dx^{k_1}}, \quad 0<x<1, \tag{1}$$

с комплексным параметром λ и краевыми условиями

$$\sum_{0\leqslant k_0+k_1\leqslant n} \lambda^{k_0}\left\{\alpha_{k_0k_1}\,\frac{d^{k_1}y}{dx^{k_1}}\bigg|_{x=0} + \beta_{k_0k_1}\,\frac{d^{k_1}y}{dx^{k}}\bigg|_{x=1}\right\}=0. \tag{2}$$

Здесь $a^{k_0k_1}(x)$ — суммируемые, ограниченные функции, а в случае $k_0+k_1=n$ суммируемы также $\frac{da^{k_0k_1}(x)}{dx}$, $a^{n0}\equiv -1$. Полагаем, что корни $\varphi_i(x)$, $i=\overline{1,n}$, характеристического уравнения

$$a^{n0}(x)\,\varphi^n + a^{1\ n-1}(x)\,\varphi^{n-1}+\dots+a^{\ n-1,1}(x)\,\varphi-1=0 \tag{3}$$

различны при всех x, отличны от нуля, их аргументы и аргументы из разностей не зависят от x, $\alpha_{k_0k_1}$, $\beta_{k_0k_1}$ — n-мерные столбцы констант.

Обычной нормировкой условий (2) построим $n\times 2n$-*старшую матрицу граничных условий* $(\alpha,\ \beta)$ [1, с. 66; 2].

Введем в рассмотрение числа $w_j=e^{\sqrt{-1}\arg\varphi_j(x)}$ и пусть τ — наибольшее количество чисел w_j, попадающих внутрь одной комплексной полуплоскости, ограниченный прямой, проходящей через начало. Справедлива

Теорема 1. *При наших условиях неравенство*

$$\min(\operatorname{rank}\alpha,\ \operatorname{rank}\beta)\geqslant\tau \tag{4}$$

необходимо для регулярности задачи (1)–(2).

В теореме 1 простота сочетается с существенностью. Ограничимся известным примером задачи $y''-\lambda^2y=0$, $0<x<1$, $y(0)=y(1)=0$, связанной с тригонометрическими рядами Фурье. Здесь $\varphi_{1,2}=\pm1$, $\operatorname{rank}\alpha=1$, $\operatorname{rank}\beta=1$, $\tau=1$ и неравенство (4) очевидно. В случае выполнения условия (4) для решения вопроса регулярности задачи достаточно убедиться в отличие от нуля известных определителей [1, 2] n-го порядка (в количестве $\leqslant n(n+3)$), связанных с матрицей (α,β) и числами φ_i.

2. Рассмотрим пучок $(\perp)$ с постоянными коэффициентами $a^{k_0k_1}$ и граничными условиями (2), для которых определяющая матрица (α, β) имеет вид

$$(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha' & 0 \\ \alpha'' & \beta'' \end{pmatrix},$$

где $\alpha' - l \times n$, $\alpha'' - n - l \times n$, $\beta'' - n - l \times n$ — матрицы, причем $0 < n - l \leqslant l < n$ и $\mathrm{rank}(\alpha, \beta) = n$.

Как и в п. 1 считаем, что корни характеристического уравнения (3) различны и отличны от нуля. Пусть τ — наибольшее из количеств φ-корней, лежащих на лучах, исходящих из начала λ-полуплоскости (сравните со смыслом этого же обозначения в п. 1). Введем в рассмотрение «дефектное» в отношении полноты, число

$$d = \begin{cases} \tau - (n - l) & \text{при} \quad \tau > n - l, \\ 0 & \text{при} \quad \tau \leqslant n - l. \end{cases}$$

Теорема 2. *При указанных условиях, если* $\min(\mathrm{rank}\,\alpha,\ \mathrm{rank}\,\beta) \geqslant \tau$, *то система производных цепочек от собственных и присоединенных функций указанного пучка n-кратно полна в $L_2^n(0,1)$. Если же* $\min(\mathrm{rank}\,\alpha,\ \mathrm{rank}\,\beta) < \tau$, *то указанная система $n - d$ кратно полна в $L_2^{n-d}(0,1)$ и будет иметь бесконечный дефект в смысле $n - d + 1$ кратной полноты.*

Литература

1. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы.—М.: Наука, 1969.—526 с.
2. *Вагабов А. И.* Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов.—Ростов н/Д., 1994.—160 с.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Л. Х. Гадзова

(Россия, Нальчик; ИПМА)

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i \partial_{0x}^{\alpha_i} u(x) + \lambda u(x) = f(x), \quad x \in]0,1[\,, \tag{1}$$

где $\alpha_i \in]1,2[$, $\beta_1 > 0$, $\lambda, \beta_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_m$, $(i = \overline{1,m}\,)$, ∂_{0x}^{β} — регуляризованная дробная производная (производная Капуто) [1, с. 11].

В монографии [1] даны постановки видоизменных задач Коши и Неймана для уравнения второго порядка с дробной производной порядка $\alpha \in [1,2]$. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами исследовались в работах [2–4]. Относительно изложения результатов и библиографии работ, связанных с линейными дифференциальными уравнениями дробного порядка, укажем работы [5] и [6]. Для уравнения (1) решена задача Дирихле методом функции Грина в работе [7].

В данной работе найдено общее представление решения уравнения (1), с помощью которого построены решения задачи Дирихле и задачи Неймана.

Литература

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение.—М: Физматлит, 2003.—272 с.
2. *Ozturk I.* On the theory of fractional differential equation // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. акад. наук.—1998.—Т. 3, № 2.—С. 35–39.
3. *Псху А. В.* Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Мат. сб.—2011.—Т. 200, № 4.—С. 111–122.
4. *Псху А. В.* К теории задачи Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. акад. наук.—2009.—Т. 11, № 1.—С. 61-65.
5. *Гадзова Л. Х.* Обобщенная задача Дирихле для линейного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами // Диф. уравнения.—2014.—Т. 50, № 1.—С. 121–125.
6. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and applications of fractional differential equations // North-Holland Math. Stud., Elsevier.—Amsterdam, 2006.—Vol. 204.
7. *Гадзова Л. Х.* Задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. акад. наук.—2013.—Т. 15, № 2.—С. 36–39.

ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ q-РАЗНОСТНОГО АНАЛОГА ОПЕРЕЖАЮЩЕГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

А. Н. Зарубин
(Россия, Орел; ОГУ)

Уравнение

$$LU(x,y) \equiv U_{xx}(x,y) + \operatorname{sgn} y\, U_{yy}(x,y) = H\left(\ln\frac{q}{x}\right) U(qx,y), \tag{1}$$

$1 < q \equiv \mathrm{const}$, $H(\xi)$ — функция Хевисайда, рассмотрим в области $D = D^+ \cup D^- \cup I$, где $D^+ = \{(x,y) : 1 < x < q^2,\ 0 < y < h\} = D_0^+ \cup D_1^+$ $(0 < h \equiv \mathrm{const})$ и $D^- = D_0^- \cup D_1^-$ — эллиптическая и гиперболическая части области D, причем

$$D_k^+ = \big\{(x,y) :\, q^k < x < q^{k+1},\ 0 < y < h\big\} \quad (k = 0, 1),$$

$$D_k^- = \left\{(x,y) :\, q^k - y < x < q^{k+1} + y,\ \frac{q^k(1-q)}{2} < y < 0\right\} \quad (k = 0, 1),$$

$$I = \big\{(x,y) :\, 1 < x < q^2,\ y = 0\big\}, \quad Y = \big\{(x,y) :\, x = q,\ 0 < y < h\big\}.$$

Пусть $D_k = D_k^+ \cup D_k^- \cup I_k$, где

$$I_k = \big\{(x,y) :\, q^k < x < q^{k+1},\ y = 0\big\} \quad (k = 0, 1).$$

Задача T. Найти в области D функцию $U(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D\backslash Y) \cap C^2(D\backslash(I \cup Y))$, удовлетворяющую уравнению (1), краевым условиям

$$U(1,y) = U(q^2,y) = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant h,$$

$$U(x,h) = \varphi(x), \quad 1 \leqslant x \leqslant q^2,$$

$$U(x, q^k - x) = \psi_k(x), \quad q^k \leqslant x \leqslant \frac{q^k(1+q)}{2} \quad (k = 0, 1),$$

условиям сопряжения

$$U(x,-0) = U(x,+0) = \omega(x), \quad 1 \leqslant x \leqslant q^2,$$

$$U_y(x,-0) = U_y(x,+0) = \nu(y), \quad 1 < x < q^2,\ x \neq q,$$

условиям согласования

$$\varphi(1) = \varphi(q^2) = 0, \quad \psi_0(1) = 0,$$

где $\varphi(x)$, $\psi_k(x)$ $(k = 0, 1)$ — заданные непрерывные достаточно гладкие функции.

Теорема. *Если* $\varphi(x) \in C[1,q^2] \cap C^2(1,q^2)$, $\psi_k(x) \in C[q^k, q^k(1+q)/2] \cap C^2(q^k, q^k(1+q)/2)$ $(k = 0, 1)$ *абсолютно интегрируемы на своих промежутках;*

$\varphi(0)=\varphi(q^2)=0$, $\psi_0(1)=0$ *и* $\psi_k'(x)$ *при* $x\to q^k$ $(k=0,1)$ *допускает интегрируемую особенность, то существует единственное решение* $U(x,y)$ *задачи* T.

Единственность решения задачи Т следует из полученных в D^- и D^+ на $y=0$, $1<x<q^2$, неравенств соответственно

$$\beta=\int\limits_1^{q^2}\omega(x)\nu(x)dx\geqslant 0 \quad \text{и} \quad \beta\leqslant 0,$$

$$\beta+\iint\limits_{D^+}\left[U_x^2(x,y)+U_y^2(x,y)+\gamma^2(x,y)\right]dxdy=0,$$

где

$$\gamma^2(x,y)=H\left(\ln\frac{q}{x}\right)U(x,y)U(qx,y)\ \geqslant$$
$$\geqslant\ \frac{1}{2}H\left(\ln\frac{q}{x}\right)\left[U^2(x,y)+\left(\int\limits_1^{qx}|U_\xi(\xi,y)|\,d\xi\right)^2-\left(\int\limits_x^{qx}|U_\xi(\xi,y)|\,d\xi\right)^2\right]\geqslant 0.$$

Построение решения задачи Т сведено к решению системы уравнений смешанного типа

$$L\overline{U}(x,y)=A\overline{U}(x,y),\quad (x,y)\in D_0,$$

где

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad \overline{U}(x,y)=\big(U_0(x,y),U_1(qx,y)\big)^T,$$

а

$$U_k(x,y)=U(x,y),\quad (x,y)\in D_k\quad (k=0,1).$$

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЛИНЕЙНОЙ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ЗАДАЧИ С ОПЕРАТОРОМ СТОКСА В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ И ВЫРОЖДЕНИЕМ

М. Р. Ишмеев

(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Доклад посвящен рассмотрению следующей задачи. Пусть Ω — ограниченная область в R^3 со сколь угодно гладкой границей $\partial\Omega$, $m \in N$, $\omega \gg 1$. В бесконечном цилиндре $Q = \Omega \times R$ рассмотрим задачу о $\frac{2\pi}{\omega}$-периодических по времени t решениях системы уравнений

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla p = \Delta u + B_0(x)u + \frac{1}{\omega}\, C_0(x)u + \\ + \sum_{1\leqslant|k|\leqslant m} \big(M_k(x)u + d_k(x)\big)e^{ik\omega t} + d_0(x),\end{gathered} \tag{1}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \tag{2}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3}$$

Здесь $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, $t \in R$, $B_0(x)$, $C_0(x)$, $M_k(x)$ и $d_0(x)$, $d_k(x)$ — известные бесконечно гладкие матрицы-функции и вектор-функции соответственно, причем $B_0(x)$, $C_0(x)$ и $d_0(x)$ — вещественные, а $M_k(x)$, $d_k(x)$ комплексно сопряжены с $M_{-k}(x)$, $d_{-k}(x)$.

Символом Π обозначим известный ортогональный проектор в $L_2(\Omega)$ на $S_2(\Omega)$ (см. [1, 2]). Введем в $S_2(\Omega)$ оператор $A = \Pi\Delta + \Pi B_0(x)$ с областью определения $D(A) = \{u \in S_2(\Omega) \cap W_2^2(\Omega),\ u|_{\partial\Omega} = 0\}$ и выражения

$$B = \Pi C_0(x) + \sum_{1\leqslant|k|\leqslant m} \frac{\Pi M_k(x)\Pi M_{-k}(x)}{ik},$$

$$C = \sum_{\substack{1\leqslant|k|,|l|,|s|\leqslant m,\\ k+l+s=0}} \frac{\Pi M_k \Pi M_l \Pi M_s}{(is)s(s+l)} + \sum_{1\leqslant|k|\leqslant m} \frac{\Pi M_k(x)\Pi(\Delta + D)\Pi M_{-k}(x)}{(ik)^2}.$$

Предположим, что $\lambda = 0$ — простое собственное значение оператора A и соответствующий ему собственный вектор $a_0(x)$ имеет присоединенный в смысле Вишика — Люстерника вектор $a_1(x)$ первого порядка относительно тройки A, B, C [3].

Для задачи (1)–(3) были установлены существование и единственность $\frac{2\pi}{\omega}$-периодического решения при достаточно больших ω, это решение является вещественным и бесконечно дифференцируемым. Построение его полной асимптотики сводится к решению конечного числа однозначно разрешимых задач более простого вида.

Эти результаты получены совместно с В. Б. Левенштамом и подробно изложены в работе [4]. Аналогичные результаты для параболических уравнений изложены в работе [5].

Литература

1. *Юдович В. И.* Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости.— Ростов н/Д.: Изд-во РГУ, 1984.
2. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.—М.: Наука, 1970.
3. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук.—1960.—Т. 15, № 3.—С. 3–80.
4. *Levenshtam V. B., Ishmeev M. R.* Asymptotic integration of linear system with high-frequency coefficients and Stokes operator in the main part // Asymptotic Anal.—2015.— Vol. 92, № 3–4.—P. 363–376.
5. *Гусаченко В. В., Ильичева Е. А., Левенштам В. Б.* Линейная параболическая задача. Высокочастотная асимптотика в критическом случае // Журн. вычисл. математики и мат. физики—2013.—Т. 53, № 7.—С. 1067–1081.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Л. Л. Карашева

(Россия, Нальчик; ИПМА)

Рассмотрим уравнение

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t) - (-1)^{n+1}\frac{\partial^{2n}u}{\partial x^{2n}} = f(x,t), \tag{1}$$

где $n \in \mathbb{N}$, D_{0t}^{α} — оператор дробного (в смысле Римана — Лиувилля) интегро-дифференцирования порядка α, $0 < \alpha < 1$ [1, с. 28].

Уравнение (1) при $n = 1$ широко исследовано, для него в работе [2] построено фундаментальное решение, дано решение задачи Коши и доказана теорема единственности в классе функций, удовлетворяющих аналогу условия А. Н. Тихонова. С помощью интегральных преобразований в работе [3] найдено решение задачи Коши для дробного диффузионно-волнового уравнения и эволюционных уравнений. В работе [4] найдено решение диффузионно-волнового уравнения четвертого порядка с дробной производной Капуто по времени с помощью интегральных преобразований.

В данной работе для уравнения (1) построено фундаментальное решение, исследованы задача Коши, задача в полуполосе и задачи в прямоугольных областях.

Литература

1. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии.—М.: Высш. шк., 1995.—301 с.
2. *Псху А. В.* Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка // Изв. РАН. Сер. мат.—2009.—Т. 73, № 2.—С. 141–182.
3. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and applications of fractional differential equations // North-Holland Math. Stud.—2006.—Vol. 204.—540 p.
4. *Agrawal O. P.* A general solution for a fourth-order fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain // Computers and Structures.—2001.—Vol. 79.—P. 1497–1501.
5. *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. —М.: Наука, 2005.—195 с.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО СЛАГАЕМОГО В ЭВОЛЮЦИОННОМ УРАВНЕНИИ ПОСРЕДСТВОМ НЕЛОКАЛЬНОГО УСЛОВИЯ СРЕДНЕГО ПО ВРЕМЕНИ

А. В. Карев (Россия, Москва; МГУ),
И. В. Тихонов (Россия, Москва; МГУ)

В комплексном банаховом пространстве E рассмотрим линейную обратную задачу:

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + g, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{1}$$

$$u(0) = u_0, \quad \int\limits_0^1 u(t)\,dt = u_1, \tag{2}$$

с неизвестной функцией $u\colon [0,T] \to E$ и неизвестным элементом $g \in E$. На функцию $u(t)$ накладываем стандартные требования гладкости. Оператор A считаем линейным и замкнутым в E. Область определения $D(A) \subset E$ не обязательно плотна в E. Элементы u_0, u_1 заданы в $D(A)$. При столь общих предположениях доказан следующий критерий единственности решения обратной задачи (1), (2).

Теорема 1. *Для того чтобы обратная задача* (1), (2) *при любом выборе элементов $u_0, u_1 \in D(A)$ имела не более одного решения $(u(t), g)$ необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль характеристической функции*

$$L(\lambda) \equiv \int\limits_0^1 dt \int\limits_0^t e^{\lambda(t-s)}\,ds = \frac{e^{\lambda} - 1 - \lambda}{\lambda^2}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{3}$$

не являлся собственным значением оператора A.

С учетом расположения нулей характеристической функции (3) (см. [1]) получаем удобные достаточные признаки единственности решения обратной задачи (1), (2).

Теорема 2. *Пусть выполнено любое из предположений:* 1) *оператор A вообще не имеет собственных значений;* 2) *все собственные значения оператора A вещественные;* 3) *все собственные значения оператора A расположены в полуплоскости* $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 2$; 4) *все собственные значения оператора A расположены в полосе* $|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant 9\pi/4$. *Тогда обратная задача* (1), (2) *при любом выборе элементов $u_0, u_1 \in D(A)$ имеет не более одного решения $(u(t), g)$.*

Фраза «имеет не более одного решения» допускает, конечно, что при некоторых $u_0, u_1 \in D(A)$ решение обратной задачи может отсутствовать. Вопрос о разрешимости подобных задач надо изучать отдельно. Соответствующая теория была развита в [2] при дополнительном предположении корректности прямой задачи Коши для уравнения $u'(t) = Au(t)$. Применяя теорему 4 из [2] и учитывая, что нули характеристической функции (3) попадают в полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda > 2$ (см. [1]), устанавливаем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть оператор A порождает C_0-полугруппу $U(t)$, удовлетворяющую оценке $\|U(t)\| \leqslant Me^{2t}$ при $t \geqslant 0$ с некоторой константой $M \geqslant 1$. Тогда при любом выборе элементов $u_0, u_1 \in D(A)$ обратная задача* (1), (2) *имеет и притом единственное решение $(u(t), g)$.*

Было бы полезно распространить на случай теоремы 3 схему доказательства теоремы 4 из работы [3]. Это позволит обосновать конструктивный алгоритм решения обратной задачи (1), (2) для полугрупп соответствующего экспоненциального роста.

Литература

1. *Карев А. В., Тихонов И.* Критерий единственности решения в линейной обратной задаче с нелокальным условием среднего по времени // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Междунар. конф.: «Воронежская зимняя математическая школа».—Воронеж: Издат. дом ВГУ, 2015.—С. 52–53.
2. *Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С.* Вопросы корректности прямых и обратных задач для эволюционного уравнения специального вида // Мат. заметки.—1994.—Т. 56, вып. 2.—С. 99–113.
3. *Прилепко А. И., Тихонов И. В.* Восстановление неоднородного слагаемого в абстрактном эволюционном уравнении // Изв. РАН. Сер. мат.—1994.—Т. 58, № 2.—С. 167–188.

ПОЛУСИЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В МЛАДШИХ ЧЛЕНАХ

М. В. Кукушкин
(Россия, Нальчик; ИПМА)

Рассматривается краевая задача для уравнения второго порядка с дробной производной в младших членах, данная задача для линейного дифференциального уравнения подробно изучена в предположениях гладкости относительно коэффициентов [1]. В данной работе получены условия существования разрешимого расширения дифференциального оператора второго порядка с дробной производной в младших членах, действующего из пространства Соболева с заданной гладкостью элементов пространства, эти условия включают случаи когда коэффициент при дробной производной имеет разрыв как первого, так и второго рода. В работе [2] доказывается существование и единственность решения задачи Дирихле для рассматриваемого уравнения в классе регулярных решений $C[a,b] \cap C^2(a,b)$ в предположении непрерывности относительно коэффициента при дробной производной. Одним из результатов данной работы является частичное повторение результатов [2] при снятии условия непрерывности коэффициента при дробной производной. Рассмотренный метод доказательства единственности решения задачи является принципиально иным нежели в [2]. Если это не оговорено дополнительно, везде будем полагать $\alpha \in (0,1)$, $x \in \overline{\Omega}$. Интегрирование будем понимать в смысле Лебега. Будем использовать обозначения:

$$\Omega = \big\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n,\, a < x_i < b,\, i = 1, 2, \ldots, n\big\}.$$

$$\langle f, g\rangle_0 \equiv \langle f, g\rangle_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} f(x)g(x)\,dx, \quad \|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_{L_2(\Omega)},$$

$$I^{\alpha}_{b-}(L_1) = \big\{f(x) :\, f(x) = D^{-\alpha}_{bx}\varphi(t),\, \varphi(x) \in L_1(a,b)\big\},$$

$$W^l_2(\text{гр}) = \big\{u(x) :\, u(x) \in W^l_2(\Omega),\, u(\Gamma) = 0\big\}.$$

Допустим имеет место одномерный случай, рассмотрим краевую задачу

$$Lu \equiv \mathcal{D}^2 u(x) - c(x) D^{\alpha}_{ax} u(t) = f(x) \in L_2(a,b), \tag{1}$$

$$u(x) \in W^2_2\,(\text{гр}).$$

Выполнение энергетических неравенств

$$\|Lu\|_0 \geqslant C\|u\|_0, \tag{2}$$

$$\|L^{+}u\|_0 \geqslant C\|u\|_0 \tag{3}$$

дает существование и единственность полусильного решения [1, с. 98] при любой правой части из L_2.

Теорема 1. *Пусть* $c(x) \in I^{\alpha}_{b-}(L_1)$, $\varphi(x) \geqslant 0$. *Тогда имеют место энергетические неравенства* (2), (3).

Пусть: $\Omega \in E^n$, $\alpha_i \in (0,1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Рассмотрим краевую задачу

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{n} \left(\mathcal{D}^2_{x_i} u(x) - c_i(x_i) D^{\alpha_i}_{ax_i} u\right) = f(x) \in L_2(\Omega), \tag{4}$$

$$u(x) \in W^l_2(\text{гр}).$$

Имеет место следующая теорема, являющаяся обобщением теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть* $c_i(x_i) \in I^{\alpha}_{b-}(L_1)$, $\varphi_i(x_i) \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $l \geqslant \left[\frac{n}{2}\right] + 2$. *Тогда для оператора задачи* (4) *имеют место энергетические неравенства* (2), (3).

Литература

1. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев: Наукова думка, 1965.—798 с.
2. *Нахушев А. М.* Задача Штурма — Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах // Докл. АН СССР.—1977.—Т. 234, № 2.—С. 308–311.

О ДВУХ МЕТОДАХ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ГОФРИРОВАННЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ[1]

С. С. Макаров (Россия, ЮФУ; Ростов-на-Дону),
Ю. А. Устинов (Россия, ЮФУ; Ростов-на-Дону)

При проектировании оболочечных конструкций одним из основных шагов является расчет на устойчивость. В настоящий момент решение данной задачи при помощи одного из множества численных методов или с помощью прикладных программ, которые их реализуют, не является неразрешимой задачей.

Гофрировка является одним из способов контроля жесткости оболочек при проектировании тонкостенных конструкций, подверженных различным нагрузкам. Гофрированные по окружности оболочки (сильфон) используются в конструкциях с низкой изгибной жесткостью в продольном направление и высокой изгибной жесткостью в окружном направлении. Осесимметричная гофрированная оболочка, рассматриваемая в данной работе, по сути является сильфоном, который находит применение в качестве упругого чувствительного элемента в различных автоматических измерительных приборах. В силу своей геометрической структуры, сильфоны способны совершать значительные перемещения при растяжении-сжатии, гидростатическом давлении и изгибающем моменте. Данная способность стала причиной широкого распространения сильфонов в качестве чувствительных элементов. В [1, 2] было установлено, что сильфон может потерять устойчивость под действием внутреннего давления. Главный особенностью гофрированных оболочек можно назвать высокие жесткости на изгиб и сжатие в направлении гофрировки. В основном при исследовании гофрированных оболочек, если длина гофра не сильно отличается от толщины, применяется моделирование сложной формы меридиана ортотропной цилиндрической оболочкой. Тем не менее, анализ устойчивости таких оболочек показал, что выводы, сделанные на основании ортотропной теория могут оказаться недостоверными.

Данная работа посвященна методам исследования устойчивости гофрированных оболочек. Для постановки краевой задачи используются новые, по форме, уравнения равновесия оболочки вращения, полученные в рамках теории Кихргофа — Лява. В качестве граничных условий на торцах оболочки выбраны условия шарнирного опирания. Критические значения гидростатического давления, внешнего и внутреннего, при которых осесимметричное напряженно-деформированное состояние теряет устойчивость определяются на основе двух разработаных алгоритмов, один из которых опирается на метод начальных параметрах, а второй, новый в данном классе задач метод — метод Флоке — Ляпунова. Для найденных значений критической нагрузки построены формы потери устойчивости.

[1]Работа выполнена в рамках проектной части государственного задания № 9.665.2014.К в сфере научной деятельности.

Литература

1. *Кантор Б. Я.* Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения.—Киев: Наукова думка, 1990.—134 с.
2. *Андреева Л. Е.* Сильфоны. Расчет и проектирование.—М.: Машиностроение, 1975.—156 с.

НЕКОТОРЫЕ МАТРИЧНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

А. В. Макарова

(Россия, Воронеж; ВГУ)

В публикациях [1] и [2] при доказательстве теорем о разрешимости стохастических дифференциальных включений с текущими скоростями были использованы некоторые технические конструкции.

В данной публикации остановлюсь на них чуть подробнее. Введем обозначение через $S_+(n)$ множество симметрических положительно определенных $n \times n$ матриц. В [3] на основе разложения Гаусса показано, что каждая матрица $\alpha \in S_+(n)$ представима в виде $\alpha = \zeta\delta\zeta^*$, где ζ — нижнетреугольная матрица с единицами на диагонали, ζ^* — ее транспонированная, т. е. верхнетреугольная матрица с единицами на диагонали, и δ диагональная матрица, чьи угловые миноры (отметим, что все они положительны) совпадают с угловыми минорами матрицы α. Обозначим диагональные элементы марицы δ через $\delta_1, \dots \delta_n$. Тогда $A = \zeta\sqrt{\delta}$, где $\sqrt{\delta}$ — диагональная матрица с $\sqrt{\delta_1}, \dots, \sqrt{\delta_n}$ на диагонали такова, что $\alpha = AA^*$.

Если мы имеем дело с непрерывным (измеримым, гладким) полем $\alpha(t, m)$, $t \in \mathbb{R}$ и $m \in \mathcal{T}^n$, где T^n — плоский n-мерный тор, то соответствующие матрицы $A(t, m)$ также непрерывны (измеримы, гладки).

Обозначим $T_-(n)$ — множество нижнетреугольных матриц порядка n, с нулями на диагонали, которое очевидно является линейным подпространством в $\mathbb{R}^{n^2}$ — линейном пространстве всех $n \times n$ матриц.

Пусть $L_0(n)$ — линейное пространство в $\mathbb{R}^n$ состоящее из векторов $X = (X^1, \dots, X^n)$ таких, что $X^1 + \dots + X^n = 0$. Обозначим через S_{LC} множество симметрических положительно определенных матриц с постоянным ($C > 0$) определителем. Введем гладкое отображение $L_C : S_{LC} \to L_0$, которое переводит симметрическую матрицу $\alpha \in S_{LC}$ в $L_C(\alpha) = \big(\log \frac{\sqrt{\delta_1}}{\sqrt{C}}, \dots, \log \frac{\sqrt{\delta_n}}{\sqrt{C}}\big) \in L_0(n)$. Заметим, что $T_-(n)$ и $L_0(n)$ линейные пространства, т. е. понятие выпуклого множества корректно в них.

Данные конструкции с симметрическими матрицами позволили нам говорить о разрешимости стохастических дифференциальных включений с текущими скоростями для полунепрерывной сверху (снизу) правой части.

Литература

1. *Gliklikh Yu. E., Makarova A. V.* On solvability of stochastic differential inclusions with current velocities // Applicable Anal.—(in print).
2. *Makarova A. V.* On solvability of stochastic differential inclusions with current velocities. II // Global and Stochastic Anal.—2012.—Vol. 2, № 1.—P. 101–112.
3. *Azarina S. V., Gliklikh Yu. E.* Diferential inclusions with mean derivatives // Dynam. Systems Appl.—2007.—Vol. 16, № 1.—P. 49–71.

ОПЕРАТОР ХИРОТЫ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО КОМПЛЕКСНОГО УРАВНЕНИЯ

О. В. Новикова

(Россия, Ставрополь; СКФУ)

Согласно алгоритму Хироты [1] с помощью некоторой замены необходимо привести исходное уравнение к билинейной форме. Рассмотрим нелинейное уравнение типа Шредингера

$$\overline{p}_t - ip_{xx} + 2ip\left(p^2 + \overline{p}^{\,2}\right) = 0, \tag{1}$$

исследуемое в [2], для которого с помощью метода Хироты построены точные решения в виде бегущих волн и 1-солитонные решения в виде кинков [3]. В данных работах была проведена замена действительных фукций $u(x,t)$ и $v(x,t)$ из системы уравнений, эквивалентной ихсодному комплексному уравнению (1):

$$\begin{cases} u_t + v_{xx} - 4v\left(u^2 - v^2\right) = 0, \\ v_t + u_{xx} - 4u\left(u^2 - v^2\right) = 0, \end{cases}$$

на частное двух действительных функций. В книге М. Абловица [1] рассмотрено применение алгоритма Хироты для нелинейного уравнения Шредингера, когда выполняется замена комплекснозначной функции. Применим такой подход для рассматриваемого уравнения (1).

Лемма. *Нелинейное комплексное дифференциальное уравнение в частных производных* (1) *с помощью замены*

$$p(x,t) = \frac{F(x,t)}{G(x,t)}, \quad \overline{p}(x,t) = \frac{\overline{F}(x,t)}{G(x,t)}, \tag{2}$$

где $F(x,t)$ *— комплекснозначная функция,* $G(x,t)$ *— действительная функция, приводится к системе двух билинейных уравнений*

$$\begin{cases} D_t\overline{F} \circ G - iD_x^2 F \circ G = 0, \\ D_x^2 G \circ G + 2\left(F^2 + \overline{F}^{\,2}\right) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

$\lhd$ Представим комплекснозначную функцию $p(x,t)$ в виде (2). Частные производные примут вид

$$\overline{p}_t = \frac{\overline{F}_t G - \overline{F} G_t}{G^2}, \qquad p_{xx} = \frac{G(F_{xx}G - FGxx) - 2G_x(F_xG - FG_x)}{G^3}.$$

Подставив данные значения в уравнение (1), имеем

$$G\left(\overline{F}_t G - \overline{F}G_t\right) - i\left(F_{xx}G^2 - FGG_{xx} - 2GF_xG_x + 2FG_x^2\right) + 2iF\left(F^2 + \overline{F}^{\,2}\right) = 0.$$

Преобразуем равенство так, чтобы воспользоваться оператором дифференцирования Хироты [1]:

$$D_t F \circ G = F_t G - G_t F.$$

Для этого добавим и вычтем в левой части полученного равенства $iFGG_{xx}$, имеем

$$G\big(\overline{F}_t G - \overline{F} G_t\big) + 2iF\big(F^2 + \overline{F}^{\,2}\big) -$$
$$- i\big(G(F_{xx}G - 2F_x G_x + FG_{xx}) - F\big(2GG_{xx} - 2G_x^2\big)\big) = 0.$$

Воспользовавшись оператором дифференцирования Хироты, придем к равенству

$$G\big(D_t\overline{F} \circ G - iD_x^2 F \circ G\big) + iF\big(D_x^2 G \circ G + 2F\big(F^2 + \overline{F}^{\,2}\big)\big) = 0,$$

которое распадается на систему двух уравнений (3). Что и требовалось доказать. ▷

Литература

1. *Абловиц М.* Солитоны и метод обратной задачи.—М.: Мир, 1987.—479 с.
2. *Новикова О. В.* Исследование комплекснозначного нелинейного уравнения в частных производных // Вестн. Балт. федер. ун-та им. И. Канта.—2012.—Т. 4.—С. 160–166.
3. *Новикова О. В.* Нелинейное дифференциальное уравнение на комплекснозначную функцию с солитонными свойствами // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика: Сб. науч. тр. по материалам междунар. заоч. науч.-практ. конф. «Современные проблемы анализа динамических систем. Приложения в технике и технологиях».—2014.—Ч. 2 (4)—С. 116–119.

СПЕКТРАЛЬНОЕ СООТНОШЕНИЕ ДЛЯ ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА НА ОТРЕЗКЕ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Л. Ю. Плиева

(Россия, Владикавказ; ЮМИ, СОГУ)

В работе рассматривается гиперсингулярный интеграл вида

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\frac{T_n(t)}{(t-x)^2}\,dt, \quad x\in(-1,1), \tag{1}$$

где $T_n(t)=\cos(n\arccos t)$.

Интеграл (1) надо понимать в смысле конечного значения по Адамару. Для него получено и доказано спектральное соотношение, которое можно использовать при построении квадратурных формул для гиперсингулярных интегралов на отрезке интегрирования.

Справедлива теорема.

Теорема. *Для интеграла*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\frac{T_n(t)}{(t-x)^2}\,dt, \quad x\in(-1,1),$$

где $T_n(t)=\cos(n\arccos t)$ — *многочлен Чебышева первого рода, справедлива формула*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\frac{T_n(t)}{(t-x)^2}\,dt=\frac{xU_{n-1}(x)-nT_n(x)}{1-x^2}, \quad x\in(-1,1). \tag{2}$$

$\lhd$ Над интегралом (1) произведем следующие преобразования:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\frac{T_n(t)}{(t-x)^2}\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{T_n(t)}{(1-t^2)(t-x)^2}\,dt=$$

$$=\frac{2x}{(1-x^2)^2}\,\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{T_n(t)}{t-x}\,dt+\frac{1}{1-x^2}\,\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{T_n(t)}{(t-x)^2}\,dt+$$

$$+\frac{1}{2(1-x)^2}\,\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{T_n(t)}{1-t}\,dt+\frac{1}{2(1+x)^2}\,\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{T_n(t)}{1+t}\,dt.$$

В интегралах

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{T_n(t)}{t-x}\,dt,\quad \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{T_n(t)}{(t-x)^2}\,dt$$

заменим многочлен $T_n(t)$ через многочлены Чебышева второго рода по формуле [1]

$$T_n(t)=\frac{1}{2}\big(U_n(t)-U_{n-2}(t)\big),\quad U_n(x)=\frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Далее, используя формулы обращения [2]

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{U_n(t)}{t-x}\,dt=-T_{n+1}(x),\quad \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{U_n(t)}{(t-x)^2}\,dt=-(n+1)U_n(x),$$

для интеграла (1) после несложных преобразований получим

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\frac{T_n(t)}{(t-x)^2}\,dt=\frac{2x}{1-x^2}\,U_{n-1}(x)-\frac{nT_n(x)+xU_{n-1}(x)}{1-x^2}=$$

$$=\frac{xU_{n-1}(x)-nT_n(x)}{1-x^2}.\ \triangleright$$

Литература

1. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева.—М.: Наука, 1983.—384 с.
2. *Вайникко Г. М., Лифанов И. К., Полтавский Л. Н.* Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения.—М.: Янус-К, 2001.—507 с.

ИНФИНИТЕЗЕМАЛЬНЫЕ АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ИХ АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ

В. А. Попов

(Россия, Москва; Финансовый университет)

Рассмотрим локально заданную аналитическую аффинную связность Γ^k_{ij} на аналитическом многообразии M. Инфинитезимальные аффинные преобразования — это векторные поля $\xi^k(x)$ такие, что

$$\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial\Gamma^k_{ij}}{\partial x^l}\,\xi^l-\Gamma^l_{ij}\,\frac{\partial\xi^k}{\partial x^l}+\Gamma^k_{lj}\,\frac{\partial\xi^l}{\partial x^i}+\Gamma^k_{il}\,\frac{\partial\xi^l}{\partial x^j}\right)=0.$$

Рассмотрим аналитическое пространство аффинной связности M и аффинное преобразование $\varphi : U \to V$ между его открытыми подмножествами. Возникает вопрос, при ках условиях отображение φ аналитически продолжается до аффинного преоразования $\varphi : M \to M$ всего многообразия. Такое продолжение возможно всегда для инфинитеземальных аффинных преобразований.

Теорема 1. *Векторное поле, задающее инфинитеземальную изометрию на некоторой окрестности U произвольной точки x аналитического пространства аффинной связности M аналитически продолжается в некоторую окрестность любой другой точки $y \in M$.*

Принципиальная невозможность продолжения инфинитеземального аффинного преобразования до аффинного преобразования M в целом в общем случае заключается в том, что для алгебры Ли ζ инфинетеземальных аффинных преобразований ее стационарная подалгебра $\eta \subset \zeta$ может порождать незамкнутую подгруппу H в односвязной группе Ли G с алгеброй Ли ζ. При довольно общих условиях H замкнута в G, и все инфинетеземальные преобразования продолжаются до глобальных аффинных преобразованиях на некотором многобразии M.

Теорема 2. *Пусть ζ — алгебра Ли всех инфинитеземальных аффинных преоразований пространства аффинной связности M, $\eta \subset \zeta$ — стационарная подалгебра, G — односвязная группа Ли с алгеброй Ли ζ, $H \subset G$ — подгруппа, порожденная подалгеброй $\eta \subset \zeta$. Тогда если ζ не имеет центра, то H замкнута в G.*

Данную работу можно рассматривать как естественное продолжение работы [1, 2].

Литература

1. *Popov V. A.* On analytic extensions of Riemannian manifolds // Contemporary Problems of Mathematics, Mechanics and Computing Sciences. Collective volume prepared on the materials presented at the International conference “Tarapov’s reading”.—Kharkov, 2011.
2. *Попов В. А.* Продолжаемость локальных групп изометрий // Мат. сб.—1988.—Т. 135 (177), № 1.—С. 45—64.

ЗАДАЧА УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ТИПА ТЕЧЕНИЯ КОЛМОГОРОВА

С. В. Ревина
(Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ)

Пусть вязкая несжимаемая жидкость движется под действием поля внешних сил $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t)$, которое предполагается периодическим по пространственным переменным x_1, x_2 с периодами L_1 и L_2 соответственно. Поле скорости и давление удовлетворяют системе уравнений Навье — Стокса:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}, \nabla)\boldsymbol{v} - \nu\Delta\boldsymbol{v} = -\nabla p + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t), \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0.$$

Средняя по прямоугольнику периодов скорость считается заданной. Предполагается, что один из пространственных периодов $L_2 = 2\pi/\alpha$ стремится к бесконечности, когда волновое число $\alpha \to 0$.

Решением данной задачи, в частности, является классическое течение Колмогорова с синусоидальным профилем скорости, которое используется при моделировании различных процессов естествознания. Целью настоящей работы является построение длинноволновой асимптотики задачи устойчивости класса стационарных сдвиговых течений

$$\boldsymbol{V} = (0, V(x_1)).$$

В [1] выведены рекуррентные формулы и дан алгоритм нахождения k-го члена асимптотики в предположении, что среднее скорости отлично от нуля.

В настоящей работе выведены рекуррентные формулы для нахождения ведущих членов длинноволновой асимптотики задачи устойчивости стационарных двумерных сдвиговых течений вязкой жидкости с нулевым средним $\langle V \rangle \neq 0$ в предположении, что выполняются некоторые условия невырожденности, при которых происходит колебательная потеря устойчивости.

Литература

1. *Ревина С. В.* Рекуррентные формулы длинноволновой асимптотики задачи устойчивости сдвиговых течений // Журн. вычисл. матем. и мат. физ.—2013.—Т. 53, № 8.— С. 1387–1401.

ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ, СВЯЗАННАЯ С ОПЕРАТОРОМ ДИРАКА

Т. В. Редькина
(Россия, Ставрополь; СКФУ)

Рассмотрим систему уравнений

$$\varphi_x = L\varphi, \quad \varphi_t = A\varphi \tag{1}$$

с операторами

$$L = \begin{pmatrix} 0 & p \\ p & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \frac{1}{4\lambda} \begin{pmatrix} -2p_t & \dfrac{p_{xt}}{p} \\ -\dfrac{p_{xt}}{p} & 2p_t \end{pmatrix} \tag{2}$$

и вектор столбцом $\varphi = (\varphi_1(x,t,\lambda), \varphi_2(x,t,\lambda))^T$, $p(x,t)$ — неизвестная функция, определенная на конечном отрезке $[-c, c]$ (здесь не исключается возможность рассмотрения и бесконечного промежутка $(-\infty, \infty)$, когда $c \to \infty$), λ — произвольный параметр. Такая задача зависит от задания граничных условий функции $p(x,t)$, поэтому выберем общий случай, когда известно поведение функции

$$p(x,t)\big|_{x\to\pm c} = f(t), \tag{3}$$

где $f(t)$ — непрерывная, ограниченная $|f(t)| \leqslant F$ – const, дифференцируемая функция.

Лемма 1. *Первое уравнение системы* (1) *на границе области $x \to \pm c$ и при выполнении условия* (3), *когда $|f(t)| < \lambda$, имеет следующую систему фундаментальных решений:*

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} i \\ q(t) \end{pmatrix} e^{ikx}, \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} q^{-1}(t) \\ i \end{pmatrix} e^{-ikx}, \quad x \to c, \tag{4}$$

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} q^{-1}(t) \\ i \end{pmatrix} e^{-ikx}, \quad \psi_2 = \begin{pmatrix} i \\ q(t) \end{pmatrix} e^{ikx}, \quad x \to -c, \tag{5}$$

где $q(t) = \sqrt{\frac{f(t)+\lambda}{\lambda - f(t)}}$, $k = \sqrt{\lambda^2 - f^2(t)}$ *параметрически зависит от* t.

Лемма 2. *Матрица перехода от базиса* (4), *при $x \to c$ к базису* (5), *при $x \to -c$ имеет вид*

$$\begin{pmatrix} a(t,\lambda) & b(t,\lambda) \\ \dfrac{f(t)+\lambda}{f(t)-\lambda}\, b(t,\lambda) & a(t,\lambda) \end{pmatrix},$$

где коэффициенты $a(t,\lambda)$, $b(t,\lambda)$ удовлетворяют равенству

$$a^2(t,\lambda) - \frac{f(t)+\lambda}{f(t)-\lambda}\, b^2(t,\lambda) = 1.$$

Лемма 3. *Данные рассеяния $a(t,\lambda)$, $b(t,\lambda)$ связаны с фундаментальной системой решений (4) и (5) равенствами*

$$a(t,\lambda) = -\frac{1}{2}\,W(\phi_1,\psi_1), \quad b(t,\lambda) = \frac{1}{2}\,W(\phi_1,\psi_2),$$

где $W(\phi_1,\psi_1)$, $W(\phi_1,\psi_2)$ — вронскианы решений.

Зависимость $a(t,\lambda)$ и $b(t,\lambda)$ от времени t определяется с помощью второго равенства системы (1).

Теорема 1. *Если $p(x,t)$ меняется в соответствии с условием совместности $p_{xxt}p - p_x p_{xt} = 4p^3 p_t$ системы уравнений (1) и удовлетворяет граничному условию (3) при $x \to \pm c$, то данные рассеяния для непрерывного спектра имеют вид*

$$a(t,\lambda) = \sqrt{1 + b_0^2(0,\lambda)}, \quad b(t,\lambda) = b_0(0,\lambda)\sqrt{\frac{f(t)-\lambda}{\lambda + f(t)}}\,,$$

где $b_0(0,\lambda)$ — начальное условие задачи Коши для системы уравнений (1).

Литература

1. *Новиков С. П.* Теория солитонов. Метод обратной задачи.—М.: Наука, 1980.
2. *Редькина Т. В.* Нелинейные уравнения, интегрируемые методами солитонной математики. Пары Лакса с самосопряженным оператором Дирака и с несамосопряженными операторами рассеяния.—LAP LAMBERT Academic Publishing. AV Akademikerverlag GmbH & Co. KG. Deutsch-land, 2013.—153 с.

О НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

А. А. Сагитов

(Россия, Грозный; ЧГУ)

Для дифференциального уравнения

$$\text{Д} : \left\{|y^{(i)}| \leqslant d_i,\ i = 0, 1, 2,\ x \in (a, b)\right\} \tag{1}$$

в предположении, что функции $f(x, y, y', y'')$ непрерывна по совокупности аргументов в области Д : $\{|y^{(i)}| \leqslant d_i,\ i = 0, 1, 2,\ x \in (a, b)\}$, а при $x = a, b$, т. е. на концах интервала (a, b) имеет сингулярности в смысле работ [1, 2], ставятся различные краевых задачи и доказываются теоремы существования и единственности решения.

Например, допускается дифференцируемость функции $f(x, y, y', y'')$ по y'' и существование частной производной $f'_{y''}(x, y, y', y'')$, непрерывной по всем аргументам в области Д и с неограниченными разрывами на концах (a, b).

При следующих ограничениях на f и $f'_{y''}$:

$$\left|f(x, y, y', \varphi(x)) - \varphi'(x)\right| \leqslant \psi(x), \tag{2}$$

$$f'_{y''}(x, y, y', y'')\operatorname{sign}(x - x_0) \leqslant -\bar{\psi}(x), \quad x_0 \in (a, b), \tag{3}$$

где $\varphi(x)$ непрерывно-дифференцируема для $x \in (a, b)$ и $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, функция $\psi(x)$ интегрируема в смысле Римана на сегменте $[a, b]$, функция $\bar{\psi}(x)$ для любого $\delta > 0$ интегрируема на сегменте $[a + \delta, b - \delta]$, но

$$\int\limits_a^{a+\delta} \bar{\psi}(x)\,dx = \int\limits_{b-\delta}^{b} \bar{\psi}(x)\,dx = +\infty. \tag{4}$$

Доказывается существование решения уравнения (1), удовлетворяющего переопределенным граничным условиям

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0, \quad y''(x_0) = 0, \quad y''(a) = 0, \quad y''(b) = 0. \tag{5}$$

Для этого строится интегральное уравнение

$$y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} (x - s)Ay(s)\,ds, \tag{6}$$

где

$$Ay(x) = \int\limits_{x_0}^{x} e^{\int\limits_{x_0}^{x} \varphi(s, y(s), y'(s), y''(s))ds} \left[f,\, y(t),\, y'(t),\, \varphi(t) - \varphi'(t)\right] dt + \varphi(x), \tag{7}$$

$$\varphi(x_0) = 0,$$

функции $f(x, y(x), y'(x), y''(x))$ строятся по [2].

Дополнительно прилагается выполнение неравенств

$$M = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |\varphi(x)| + \max\left\{ \int_a^{x_0} \psi(t)\,dt, \int_{x_0}^b \psi(t)\,dt \right\} \leqslant d_2,$$

$$\lambda M \leqslant d_1, \quad \frac{\lambda^2 M}{2} \leqslant d_0, \quad \lambda = \max\{a - x_0, b - x_0\}.$$

Заменяя условия (3) другими условиями, получаем разновидности краевых задач для уравнения (1).

Литература

1. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.—Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975.—352 с.
2. *Исраилов С. В., Юшаев С. С.* Многоточечные функциональные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.—Нальчик: Издат. центр «Эль-фа», 2004.—455 с.

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ[1]

М. А. Скворцова

(Россия, Новосибирск; ИМ СО РАН)

В работе рассматривается система дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, описывающая распространение птичьего гриппа у перелетных птиц, мигрирующих между двумя территориями [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\,S_w(t) = -[\mu_w^s + m_{wb}(t)]S_w(t) + \alpha_{bw}^s m_{bw}(t-\tau_{bw})S_b(t-\tau_{bw}) - \dfrac{\beta_w S_w(t) I_w(t)}{S_w(t)+I_w(t)}, \\ \dfrac{d}{dt}\,S_b(t) = -[\mu_b^s + m_{bw}(t)]S_b(t) + b(t)S_b(t)\left(1 - \dfrac{S_b(t)}{K}\right) \\ \qquad\qquad + \alpha_{wb}^s m_{wb}(t-\tau_{wb})S_w(t-\tau_{wb}) - \dfrac{\beta_b S_b(t) I_b(t)}{S_b(t)+I_b(t)}, \\ \dfrac{d}{dt}\,I_w(t) = -[\mu_w^i + m_{wb}(t)]I_w(t) + \alpha_{bw}^i m_{bw}(t-\tau_{bw})I_b(t-\tau_{bw}) + \dfrac{\beta_w S_w(t) I_w(t)}{S_w(t)+I_w(t)}, \\ \dfrac{d}{dt}\,I_b(t) = -[\mu_b^i + m_{bw}(t)]I_b(t) + \alpha_{wb}^i m_{wb}(t-\tau_{wb})I_w(t-\tau_{wb}) + \dfrac{\beta_b S_b(t) I_b(t)}{S_b(t)+I_b(t)}. \end{cases}$$

Здесь $S_w(t)$ и $S_b(t)$ — численности здоровых птиц на зимней и летней территориях, $I_w(t)$ и $I_b(t)$ — численности зараженных птиц на зимней и летней территориях соответственно, параметры запаздывания $\tau_{wb} > 0$ и $\tau_{bw} > 0$ отвечают за время перелета с одной территории на другую. Предполагается, что $m_{wb}(t)$, $m_{bw}(t)$ и $b(t)$ — кусочно-постоянные неотрицательные периодические функции, все параметры системы также неотрицательны.

В [1] были получены условия на коэффициенты системы, при которых существует асимптотически устойчивое периодическое решение $(S_w(t), S_b(t), I_w(t), I_b(t)) = (S_w^*(t), S_b^*(t), 0, 0)$, соответствующее здоровой особи. Мы получаем оценки скорости сходимости решений к указанному периодическому решению с использованием решения $H(t)$ специальной краевой задачи для дифференциального уравнения Ляпунова [2]:

$$\begin{cases} l\dfrac{d}{dt}\,H + HA(t) + A^*(t)H = -I, \quad t \in [0,T], \\ H(0) = H(T) > 0. \end{cases}$$

Важно отметить, что нахождение решения данной краевой задачи является хорошо обусловленной задачей и не требует вычисления спектра матрицы монодромии [2].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 14-01-31528.

Литература

1. *Ванг К.-Ш., Ву Дж.* Периодические системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и динамика птичьего гриппа // Соврем. математика. Фундамент. направления.—2012.—Т. 45.—С. 32–42.
2. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об устойчивости решений линейных систем с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн.—2001.—Т. 42, № 2.—С. 332–348.

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

О. Б. Сурнева
(Россия, Ставрополь; СКФУ)

В литературе, связанной с преобразованиями одного уравнения в другое особое место занимают дифференциальные связи. Примерами таких отношений могут служить преобразования Коши — Римана, Миуры, Коула и Хопфа [1, 2] и др., объединенные под более общим понятием — преобразования Бэклунда [3].

Теорема 1. *Нелинейное уравнение в частных производных*

$$v_{\eta\xi} + \frac{c}{\gamma^2}\, e^v (3\gamma v_\eta + v_\zeta + \gamma v_\xi) = 0 \tag{1}$$

связано с нелинейным уравнением

$$\varphi_\eta(\gamma\varphi_\xi + \varphi_\zeta + 3\gamma\varphi_\eta) = 0 \tag{2}$$

преобразованиями Бэклунда вида

$$\begin{cases} \gamma\varphi_\xi + \varphi_\zeta + 3\gamma\varphi_\eta = \gamma v_\xi, \\ \gamma\big(\varphi_{\eta\eta} + \varphi_\eta^2\big) + ce^v \left(\dfrac{c}{\gamma} e^v + v_\eta\right) = -2ce^v\varphi_\eta, \\ \gamma(\varphi_{\xi\eta} + \varphi_\eta\varphi_\xi) + \varphi_{\zeta\eta} + \varphi_\zeta\varphi_\eta = \gamma v_\xi\varphi_\eta + \dfrac{c}{\gamma}\, e^v\big(3ce^v - \gamma v_\xi - v_\zeta\big) + 6ce^v\varphi_\zeta, \end{cases} \tag{3}$$

где $\varphi(\xi,\eta,\zeta)$, $v(\xi,\eta,\zeta)$ — функции трех переменных ξ, η, ζ; c, γ — произвольные постоянные.

Теорема 2. *Нелинейное уравнение в частных производных* (1) *связано с классом нелинейных уравнений*

$$\gamma\varphi_{\eta\xi} + \frac{\gamma f'}{(\eta + f + 3\gamma\zeta)^2} = \left(\varphi_\eta - \frac{1}{\eta + f + 3\gamma\zeta}\right)[\gamma\varphi_\xi + \varphi_\zeta + 3\gamma\varphi_\eta] \tag{4}$$

преобразованиями Бэклунда (3)*, где f — произвольная функция комбинированной переменной $\xi - \gamma\zeta$.*

С помощью преобразований Бэклунда доказаны теоремы.

Теорема 3. *Функции*

$$\varphi = \ln[\eta + f(\xi - \gamma\zeta) - 3\gamma\zeta] + q(\xi,\zeta),$$

где $f(\xi - \gamma\zeta)$ и $q(\xi,\zeta)$ — произвольные функции, является решением уравнения (4).

Теорема 4. *Функция вида $F_1(3\gamma\zeta - \eta) + F_2(\xi - \gamma\zeta)$, где F_1, F_2 — произвольные функции, является одновременно решением уравнений* (1) *и* (2).

Теорема 5. *Семейство нелинейных уравнений в частных производных* (4) *имеет решение*

$$\varphi(\xi,\eta,\zeta) = \ln[3\gamma\zeta - \eta + f(\xi - \gamma\zeta)] + \frac{ac}{\gamma}(3\gamma\zeta - \eta) + f_1(\xi - \gamma\zeta),$$

где $f_1(\xi - \gamma\zeta)$ *— произвольная функция комбинированной переменной,* $a = e^C$ *— произвольная постоянная.*

Теорема 6. *Если нелинейное уравнение в частных производных* (1) *имеет решение*

$$v(\xi,\eta,\zeta) = \frac{c}{\gamma}\eta + f_2(\xi - \gamma\zeta) - 3c\zeta,$$

где $f_2(\xi - \gamma\zeta)$ *— произвольная функция комбинированной переменной, то уравнение* (2) *имеет решение в виде*

$$\varphi(\xi,\eta,\zeta) = \frac{a\xi + \gamma b\zeta}{a+b} f_2'(\xi - \gamma\zeta) - e^{\frac{c}{\gamma}\eta + f_2(\xi-\gamma\zeta) - 3c\zeta} + r(\xi - \gamma\zeta),$$

где $r(\xi - \gamma\zeta)$ *— произвольная функция,* a, b, c *— произвольные постоянные.*

Литература

1. *Miura R. M.* Conservation laws for the fully nonlinear long-wave equations // Stud. Appl. Math.–1974.—Vol. 53.—P. 45–56.
2. *Miura R. M., Gardner C. S., Kruskal M. D.* Korteweg-de Vries equation and generalizations II. Existence of conservation laws and constants of motion // J. Math. Phys.—1968.—Vol. 9.—P. 1204–1209.
3. *Рыбников А. К., Семенов К. В.* Связности Бэклунда и отображения Бэклунда, соответствующие эволюционным уравнениям второго порядка // Изв. вузов. Математика.—2004.—№ 5.—С. 52–68.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ В ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

И. В. Тихонов

(Россия, Москва; МГУ)

Теория операторов в полуупорядоченных векторных пространствах активно развивается почти уже сто лет. Результаты «классического» периода отражены в [1–4]. Представление о современных тенденциях можно получить из [5]. Интересные приложения для однопараметрических полугрупп отмечены в [6]. Сравнительно недавно было обнаружено, что язык полуупорядоченных банаховых пространств весьма эффективен при формализации общих принципов, возникающих в обратных задачах для эволюционных уравнений. Соответствующая теория развита в серии работ [7–10]. Наиболее законченные результаты удобно формулировать на языке банаховых структур (решеток). Приведем типичный пример, взятый из [7].

В банаховой структуре E с положительным конусом E_+ рассмотрим задачу о нахождении элемента $g \in E$ из соотношений

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + \Phi(t)g, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

$$u(0) = 0, \quad u(T) = \psi. \tag{2}$$

Здесь $T > 0$ — число. Операторная функция $\Phi(t)$ принадлежит классу $C^1([0,T]; L(E))$, где $L(E)$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов в E с обычной операторной нормой. Оператор A — линейный замкнутый в E с областью определения $D(A) \subset E$. Элемент ψ задан в $D(A)$.

Особую специфику полуупорядоченного случая выражают следующие требования.

(i) Оператор A порождает позитивную C_0-полугруппу $U(t)$, т. е. $U(t)E_+ \subset E_+$ при $t \geqslant 0$.

(ii) Операторная функция $\Phi(t)$ равномерно дизъюнктна на $[0,T]$, т. е. если $f_1 \perp f_2$, то $\Phi(t_1)f_1 \perp \Phi(t_2)f_2$ при любых $t_1, t_2 \in [0,T]$.

Как обычно, запись $f_1 \perp f_2$ означает, что $\inf(|f_1|, |f_2|) = 0$.

При сделанных предположениях справедлив следующий *принцип позитивности* для решений задачи (1), (2).

Теорема. *Пусть выполнены требования* (i), (ii). *Предположим также, что спектр оператора A лежит в полуплоскости* $\operatorname{Re}\lambda < 0$, *а операторная функция $\Phi(t)$ подчинена условиям $\Phi(t) \geqslant 0$ и $\Phi'(t) \geqslant 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, причем* $\operatorname{Ker}\Phi(T) = \{0\}$. *Тогда, если элемент $\psi \in D(A)$ выбран так, что $A\psi \leqslant 0$, то решение задачи* (1), (2) (*если оно существует*) *удовлетворяет условию $f \geqslant 0$.*

Отсюда сразу следует теорема единственности решения, а при дополнительном требовании компактности полугруппы $U(t)$ — соответствующая теорема разрешимости. Без требования компактности теорему разрешимости удалось установить пока лишь при специальном ограничении на пространство E (см. [9]). В докладе будет рассказано про генезис подобных результатов, восходящий к конкретным задачам математической физики (работы А. И. Прилепко, В. М. Исакова, В. В. Соловьева, А. Б. Костина). Также будут обсуждаться некторые обобщения и нерешенные задачи.

Литература

1. *Крейн М. Г., Рутман М. А.* Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // Успехи мат. наук.—1948.—Т. 3, вып. 1.—С. 3–95.
2. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств.—М.: ГИФМЛ, 1961.—408 с.
3. *Schaefer H. H.* Banach Lattices and Positive Operators.—Berlin: Springer–Verlag, 1974.—xii+376 p.
4. *Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В.* Позитивные линейные системы: метод положительных операторов.—М.: Наука, 1985.—256 с.
5. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
6. *Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С., ван Дуйн К., де Пахтер Б.* Однопараметрические полугруппы.—М.: Мир, 1992.—352 с.
7. *Прилепко А. И., Тихонов И. В.* Обратная задача с финальным переопределением для абстрактного эволюционного уравнения в упорядоченном банаховом пространстве // Функцион. анализ и его прил.—1993.—Т. 27, вып. 1.—С. 81–83.
8. *Прилепко А. И., Тихонов И. В.* Восстановление неоднородного слагаемого в абстрактном эволюционном уравнении // Изв. РАН. Сер. мат.—1994.—Т. 58, № 2.—С. 167–188.
9. *Тихонов И. В.* Разрешимость линейной обратной задачи с финальным переопределением в банаховом пространстве L^1-типа // Фундам. и приклад. математика.—1998.—Т. 4, № 2.—С. 691–708.
10. *Прилепко А. И., Тихонов И. В.* Принцип позитивности решения в линейной обратной задаче и его применение к коэффициентной задаче теплопроводности // Докл. РАН.—1999.—Т. 364, № 1.—С. 21–23.

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОЙ РАЗМЕРНОСТИ[1]

И. А. Уварова

(Россия, Новосибирск; ИМ СО РАН)

Работа посвящена изучению решений одной системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности. Ранее (см., например, [1, 2] и обзорную статью [3]) были указаны широкие классы систем высокой размерности, для которых нахождение приближенного решения можно свести к решению скалярного уравнения с запаздывающим аргументом. При этом были получены оценки, которые показывают, что, чем выше порядок системы, тем точнее аппроксимация. Полученные результаты дают эффективный способ для приближенного нахождения решений систем высокой размерности.

В настоящей работе рассматривается задача Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений высокой размерности специального вида. Системы такого вида возникают при моделировании многостадийного синтеза вещества с учетом нелинейности процесса. Опираясь на методы, предложенные Г. В. Демиденко, мы указываем условия, при которых последняя компонента решения задачи Коши является приближенным решением начальной задачи для скалярного уравнения с запаздывающим аргументом, а остальные компоненты решения малы [4]. Получены оценки аппроксимации.

Литература

1. *Демиденко Г. В., Лихошвай В. А., Котова Т. В., Хропова Ю. Е.* Об одном классе систем дифференциальных уравнений и об уравнениях запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн.—2006.—Т. 47, № 1.—С. 58–68.
2. *Демиденко Г. В.* Системы дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнения с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн.—2012.—Т. 53, № 6.—С. 1274–1282.
3. *Демиденко Г. В.* О классах систем дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнениях с запаздывающим аргументом // Мат. форум. Т. 5. Исслед. по мат. анализу и диф. уравнениям.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011.—С. 45–56.—(Итоги науки. Юг России).
4. *Уварова И. А.* О свойствах решений одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика.—2014.—Т. 14, № 2.—С. 88–97.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 14-01-31528.

РАЗРЕШИМОСТЬ РЕГУЛЯРИЗОВАННОГО ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КУРАМОТО — СИВАШИНСКОГО[1]

Х. Г. Умаров

(Россия, Грозный; ЧГУ)

В докладе исследуется задача Коши для псевдопараболического уравнения соболевского типа (регуляризованного обобщенного уравнения Курамото — Сивашинского)

$$u_t + u^m u_x - \mu u_{xxt} + \nu\,(u_{xx} + u_{xxxx}) = 0, \quad x \in R^1,\ t > 0, \tag{1}$$

в котором m — натуральное, а μ, ν — положительные числа, предполагая, что начальная функция

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in R^1, \tag{2}$$

и искомое классическое решение $u = u\,(x,t)$, $x \in R^1$, $t \geqslant 0$, для всех значений t по переменной x принадлежат банахову пространству $C_{ub}(R^1)$ равномерно непрерывных и ограниченных функций $\psi(x)$, $x \in R^1$, норма которого $\|\psi(x)\|_{C_{ub}} = \sup_{x\in R^1} |\psi(x)|$.

Доказано, что если начальная функция $\varphi\,(x)$ вместе со своими производными первого и второго порядков принадлежит пространству $C_{ub}(R^1)$ и одновременно является элементом пространства Соболева $W_2^1(R^1)$, тогда задача Коши (1), (2) имеет при $t \geqslant 0$ единственное решение, для которого справедлива оценка

$$\sup_{x\in R^1} |u(x,t)| \leqslant \frac{1+\mu}{\sqrt{\mu}}\,\exp\left(\frac{\nu}{2\mu}\,t\right)\sqrt{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{[\varphi(x)]^2 + [\varphi'(x)]^2\right\}dx}.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 13-01-00422-а.

ИССЛЕДОВАНИЕ СИНТЕЗА СОБСТВЕННЫХ СВОЙСТВ СИСТЕМЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА

Фетисов В. Г. (Россия, Владикавказ; ЮМИ),
Панина И. И. (Россия, Шахты; ИСОиП (филиал) ДГТУ)

Вопрос об исследовании основных характеристик (так называемых собственных свойств [1]) адаптивной многомерной динамической системы, как правило, сводится к определению матрицы весовых функций, связывающих между собой вход и выход системы в явном виде.

В современной теории систем и теории управления важную роль играет понятие состояния. Состояние системы определяется как переменная, которая в любой момент времени вместе с последующим входным сигналом системы полностью определяет ее поведение. В какой-то мере состояние системы учитывает прошлые влияния, важные для будущего. Все, что относится к динамическому режиму системы, можно получить, изучая траекторию системы в пространстве состояний.

В реальной системе непосредственному измерению поддаются не все переменные состояния; кроме того, те переменные, которые можно измерить (это всегда функции переменных состояния) измеряются не точно. В какой-то степени задача оценки состояния связана с задачей оценки параметров. Для линейных систем задача оценки состояний решена в полной мере. Нелинейная задача гораздо труднее, поэтому крупных результатов на сегодняшний день не получено.

Чтобы сформулировать задачу теории наименьших квадратов для регрессионных моделей, описанных в предыдущем разделе, необходимо ввести понятие расстояния между функциями от матриц. Это понятие удобно ввести, рассматривая каждую регрессионную модель как линейный оператор, отображающий элементы локально ограниченного пространства матричных весовых функций в локально ограниченное пространство матричных функций выходных сигналов системы. Тогда регрессионные модели можно рассматривать как представления общего вида

$$Y = L\{U\}, \quad U, Y \in L^{*\Phi},$$

где L — линейный оператор, действующий в локально ограниченном пространстве Орлича $L^{*\Phi}$.

В случае стационарных систем линейный оператор L задается выражением

$$L(K) = \int\limits_0^T K(\tau)U(t-\tau)\,d\tau, \quad K \in L_1^{*\Phi},\ 0 \leqslant t \leqslant T,$$

а локально ограниченное пространство Орлича матрицы весовых функций размерности $q \times p$, $K = (t, K(t))|0 \leqslant t \leqslant T$ — интегральным модуляром вида [2]

$$\Gamma_\Phi(u) = \int\limits_\Omega \varphi[u(t)]\,dt < +\infty.$$

Для идеализированной регрессионной модели системы с переменными параметрами линейный оператор L определяется соотношением

$$L(K) = \int\limits_0^T K(t,\tau)U(\tau,\eta)\,d\tau, \quad K \in L_2^{*\Phi},\ 0 \leqslant t,\tau \leqslant T,$$

а локально ограниченное пространство $L_2^{*\Phi}$ задается интегральным модуляром вида

$$\Gamma_\Phi(u) = \int\limits_\Omega \varphi[u(t,\tau)]\,dtd\tau < +\infty.$$

В случае практической модели регрессии для систем с переменными параметрами линейный оператор и локально ограниченное функциональное задается дискретным аналогом [3].

Литература

1. *Балакшин О. Б.* Синтез систем.—М.: РАН институт машиноведения им. А. А. Благонравова, 1995.—400 с.
2. *Фетисов В. Г., Филиппенко В. И., Козоброд В. Н.* Операторы и уравнения в линейных топологических пространствах.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2006.—432 с.
3. *Халил Х. К.* Нелинейные системы.—МИжевск: РХД, 2009.—832 с.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ РЯДОВ ЧЕБЫШЕВА

Ш. С. Хубежты (Россия, Владикавказ; ЮМИ, СОГУ),
З. В. Бесаева (Южная Осетия, Цхинвал; ЮОГУ)

В работе рассматривается сингулярное интегральное уравнение первого рода следующего вида:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,K(x,t)\varphi(t)\,dt=f(x), \qquad (1)$$

где $-1<x<1$, $K(x,t)$, $f(x)$ — достаточно гладкие функции, $\varphi(t)$ — неизвестная функция.

Для решения уравнения (1) предлагается метод с применением рядов Чебышева [1]. Суть метода заключается в том, что задача решения сингулярного интегрального уравнения после замены плотности $\varphi(t)$ рядом Чебышева сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов данного решения. После нахождения указанных коэффициентов приближенное решение получается в аналитическом виде и это позволяет найти значения неизвестной функции во всех точках отрезка $[-1,1]$.

Итак, разложим неизвестную функцию $\varphi(t)$ в ряд Чебышева. Имеем

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{\infty}C_kT_{k-1}(t), \qquad (2)$$

где $T_{k-1}(t)$ — многочлен Чебышева 1-го рода,

$$T_{k-1}(t)=\cos((k-1)\arccos t),$$

C_k, $k=1,2,3,\ldots,$ — неопределенные коэффициенты.

Подставляя полученное разложение (2) в уравнение (1), получаем следующее уравнение:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\frac{1}{t-x}\left(\sum_{k=1}^{\infty}C_kT_{k-1}(t)\right)dt+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{K(x,t)}{\sqrt{1-t^2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}C_kT_{k-1}(t)\right)dt=f(x).$$

Используя формулы обращения

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\frac{T_{k-1}(t)}{t-x}\,dt=\begin{cases}0, & k=1,\\ U_{k-2}(x), & k>1,\end{cases}$$

и известную квадратурную формулу

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,f(t)\,dt \approx \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f\left(\cos\frac{2k-1}{2m}\,\pi\right),$$

получим

$$\sum_{k=2}^{\infty} C_k U_{k-2}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k\,\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} K(x,\overline{x}_j)\,T_{k-1}(\overline{x}_j) = f(x), \tag{3}$$

где $\overline{x}_j = \cos\frac{2j-1}{2m}\,\pi$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Уравнение (3) не имеет единственное решение. Для единственности мы будем решать следующую алгебраическую систему [2]:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} C_k U_{k-2}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k\,\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} K(x,\overline{x}_j)\,T_{k-1}(\overline{x}_j) = f(x_i), \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m-1} T_{k-1}(\overline{x}_j) = C. \end{cases} \tag{4}$$

Система (4) — бесконечная система. В дальнейшем $\varphi(t)$ будем искать в виде $\varphi(t) \approx \varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k T_{k-1}(t)$. Тогда и система (4) становится алгебраической системой порядка $n \times n$, после решения которой находим коэффициенты $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Для оценки погрешности справедлива

Теорема. *Если функции $K(x,t)$, $f(x)$ класса $H_r(\alpha)$, (т. е. имеющие непрерывные частные производные порядка $r-1$, а производная порядка r удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α $(0 < \alpha \leqslant 1)$), тогда справедлива оценка*

$$|\varphi(t) - \varphi_n(t)| = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right).$$

В заключение, заметим, что проведен значительный объем вычислительных экспериментов, подтверждающих эффективность указанного метода.

Литература

1. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева.—М.: Наука, 1983.— 384 с.
2. *Лифанов И. К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.—М.: Янус, 1995.—520 с.

О СПЕКТРЕ РАДИАЛЬНОГО ПОТОКА СКВОЗЬ СФЕРИЧЕСКИЙ ЗАЗОР

А. С. Черныш
(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Исследуется спектр задачи об открытом течении в сферическом слое D с граничными условиями Кажихова:

$$\begin{aligned}&\mathbf{v}_t + \operatorname{rot}\mathbf{v} \times \mathbf{v} = -\nabla H,\\ &\operatorname{div}\mathbf{v} = 0,\\ &\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\big|_S = \gamma,\\ &\mathbf{n}\times(\mathbf{v}-\mathbf{v}^+)\big|_{S_+} = 0,\end{aligned}$$

линеаризованной относительно течения $\mathbf{V} = Cr^{-2}\mathbf{e}_r$.

Здесь $\partial D = S$, $S = S_+ \cup S_0 \cup S_-$, S_+ — вход потока, S_- — выход, S_0 — непроницаемая стенка, $\mathbf{v}^+$ — заданное гладкое поле на S_+, а $\gamma \neq 0$ — скалярная функция, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_S \gamma\, dS = 0.$$

Выводится уравнение для собственных значений:

$$\int\limits_0^c \rho_l(\tau) e^{\lambda\tau} d\tau = 0,$$

где

$$\rho_l(\tau) = a^l(1-\tau)^{-\frac{l}{3}} - a^{-l-1}(1-\tau)^{\frac{l+1}{3}}, \quad l \in \mathbb{N},\ a > 1,\ c > 0.$$

Из результатов о нулях целых функций следует, что справедлива

Теорема. *Пусть D — слой между двумя концентрическими сферами и $\mathbf{V} = Cr^{-2}\mathbf{e}_r$. Рассмотрим в D задачу Кажихова для уравнения Эйлера. Пусть $\mathcal{A}(\mathbf{V})$ — спектр этой задачи, линеаризованной около $\mathbf{V}$. Тогда $\forall\, \lambda \in \mathcal{A}(\mathbf{V})$ $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$.*

Литература

1. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа.—М.: Дрофа, 2003.—840 с.
2. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1981.—512 с.
3. *Ильин К. И., Моргулис А. Б.* О спектрах открытых течений идеальной жидкости в кольцевых облостях // Мат. форум. Т. 8, ч. 2. Исследования по диф. уравнениям, мат. моделированию и проблемам мат. образования.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014.—С. 112–123.—(Итоги науки. Юг России).
4. *Ilin K., Morgulis A.* Instability of an inviscid flow between porous cylinders with radialflow // J. Fluid Mech.—2013.—№ 730.—P. 364–378.
5. *Седлецкий А. М.* Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации.—М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.—504 с.

ОГРАНИЧЕННОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ B-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Э. Л. Шишкина

(Россия, Воронеж; ВГУ)

Пусть $\mathbb{R}_N^+ = \{x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}_N,\ x_1 > 0,\ \dots,\ x_N > 0\}$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N)$ — мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел γ_i, $i = 1, \dots, N$, $|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_N$.

В пространстве $\mathbb{R}_N^+$ применяется многомерный обобщенный сдвиг, отвечающий мультииндексу γ вида $(T^t f)(x) = T_{x_1}^{t_1} \dots T_{x_N}^{t_N} f(x)$, где $T_{x_i}^{t_i}$, $i = 1, \dots, N$, — одномерный обобщенный сдвиг, определенный в [1]:

$$(T_{x_i}^{t_i} f)(x) =$$

$$= C(\gamma_i) \int\limits_0^\pi f\Big(x_1, \dots, x_{i-1}, \sqrt{x_i^2 + t_i^2 - 2x_i t_i \cos\varphi_i}, x_{i+1}, \dots, x_n\Big) \sin^{\gamma_i - 1} \varphi_i \, d\varphi_i,$$

$$C(\gamma_i) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Через $L_p^\gamma(\mathbb{R}_n^+) = L_p^\gamma$, $p \geqslant 1$, будем обозначать замыкание по норме

$$\|f\|_{p,\gamma} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}_N^+} |f(x)|^p x^\gamma \, dx\right)^{1/p}, \quad x^\gamma = \prod_{i=1}^N x_i^{\gamma_i},$$

множества измеримых на $\mathbb{R}_N^+$ функций $f(x)$, для которых выполнено условие (см. [2, с. 21]) вида

$$f'_{x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_N) = 0, \quad i = 1, \dots, N. \tag{1}$$

Через S_{ev} будем обозначать часть класса шварцевых функций, состоящее из функций определенных на $\mathbb{R}_N^+$, удовлетворяющих (1).

Введем обозначения (см. [3, с. 337]):

$$(P \pm i0)^\lambda = \lim_{\varepsilon \to +0} (P \pm i\varepsilon)^\lambda = \begin{cases} (P(x))^\lambda, & P(x) \geqslant 0, \\ e^{\pm\lambda\pi i}|P(x)|^\lambda, & P(x) < 0, \end{cases}$$

где $P(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 - \dots - x_N^2$, $1 \leqslant n < N$, $x \in \mathbb{R}_N^+$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Следуя работе [4] (см. также [5] и [6, с. 406]), введем обобщенный B-гиперболический потенциал вида

$$(I_{B,P\pm i0}^\alpha f)(x) = C_{N,n,\gamma}(\alpha) \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} (P \pm i0)^{\frac{\alpha - N - |\gamma|}{2}} (T^y f)(x) y^\gamma \, dy,$$

где $C_{N,n,\gamma}(\alpha)$ — константа, не зависящая от f, $N+|\gamma|-2<\alpha<N+|\gamma|$.

Теорема 1. *Пусть* $f(x)\in S_{ev}$, $N+|\gamma|-2<\alpha<N+|\gamma|$, $1<p<\frac{N+|\gamma|}{\alpha}$, $q=\frac{(N+|\gamma|)p}{N+|\gamma|-\alpha p}$. *Тогда*

$$\|I^{\alpha}_{B,P\pm i0}f\|_{q,\gamma}\leqslant C_{N,n,\gamma,p}\|f\|_{p,\gamma},$$

где $C_{N,n,\gamma,p}$ *— константа, не зависящая от* f.

Теорема, аналогичная теореме 1, но полученная для случая, когда вместо обобщенного сдвига применялся обычный, рассмотрена в [4].

Литература

1. *Левитан Б. М.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук.—1951.—Т. VI, вып. 2 (42).—С. 102–143.
2. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи.—М.: Наука, 1997.—200 с.
3. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними.—М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 1958.—440 с.
4. *Ногин В. А., Сухинин Е. В.* Обращение и описание гиперболических потенциалов с L_p-плотностями.—1992.—Деп. в ВИНИТИ, № 2512-В92.
5. *Ногин В. А., Сухинин Е. В.* Обращение и описание гиперболических потенциалов с L_p-плотностями // Докл. РАН.—1993.—Т. 329, № 5.—С. 550–552.
6. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.—Минск: Наука и техника, 1987.—687 с.

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ[1]

Т. К. Ыскак

(Россия, Новосибирск; НГУ)

Рассматривается следующая система дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с параметром:

$$\frac{d}{dt}\,y(t) = \mu A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + F(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > 0,$$

где $\mu > 0$ — параметр, $\tau > 0$ — запаздывание, $A(t)$, $B(t)$ — непрерывные T-периодические матрицы, $F(t,u,v)$ — вещественнозначная непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая условию Липшица по аргументу u и следующему неравенству:

$$\|F(t,u,v)\| \leqslant q_1\|u\|^{1+\omega_1} + q_2\|v\|^{1+\omega_2}, \quad q_1, q_2 \geqslant 0,\ \omega_1, \omega_2 \geqslant 0.$$

Предполагается, что спектр матрицы $A(t)$ лежит в левой полуплоскости при всех $t \in [0,T]$.

Целью работы является исследование экспоненциальной устойчивости нулевого решения и нахождение оценок, характеризующих поведение решений системы на бесконечности. Линейный случай ($q_1 = q_2 = 0$) был рассмотрен в [1], почти линейный ($\omega_1 = \omega_2 = 0$) — в [2], случай $\omega_1 = 0, \omega_2 > 0$ — в [3].

В работе указано условие на параметр $\mu \gg 1$, при котором нулевое решение экспоненциально устойчиво, получено множество притяжения нулевого решения и установлена оценка, характеризующая экспоненциальную скорость убывания решений на бесконечности. При получении результатов был использован функционал Ляпунова — Красовского, введенный в [4].

Литература

1. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн.—2007.—Т. 48, № 5.—С. 1025–1040.
2. *Матвеева И. И., Щеглова А. А.* Оценки решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с параметрами // Сиб. журн. индустр. мат.—2011.—Т. 14, № 1.—С. 83–92.
3. *Матвеева И. И., Щеглова А. А.* Оценки решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с параметрами // Мат. заметки ЯГУ.—2012.—Т. 19, № 1.—С. 60–69.
4. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика.—2005.—Т. 5, №3.—С. 20–28.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 14-01-31528.

Секция III

Математическое моделирование

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПО ИНВАЗИИ КОНКУРИРУЮЩИХ ЗА ОБЩИЙ РЕСУРС ПОПУЛЯЦИЙ НА НЕОДНОРОДНОМ АРЕАЛЕ

Л. Е. Алпеева

(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Рассматриваются сценарии развития двух конкурирующих за единый ресурс популяций с учетом их миграции на неоднородном одномерном ареале. Модель формулируется в виде системы нелинейных уравнений параболического типа [1]. Представлены результаты экспериментов по инвазии и проанализированы возможные сценарии развития популяций, включая внедрение одной популяции на ареал, уже занятый другой популяцией.

Динамика плотности популяции-резидента $u(x,t)$ и плотности популяции-гостя $v(x,t)$ описывается системой уравнений:

$$\dot{u} = -{q^1}' + \eta^1(x)u\left(1 - \frac{u+v}{p(x)}\right), \tag{1}$$

$$\dot{v} = -{q^2}' + \eta^2(x)v\left(1 - \frac{u+v}{p(x)}\right), \tag{2}$$

$$q^1 = -k^1(x)u' + \alpha u p', \tag{3}$$

$$q^2 = -k^2(x)v' + \alpha v p'. \tag{4}$$

Здесь q^1, q^2 — потоки популяций, k^1, k^2 — коэффициенты диффузии, α — параметр миграции, η^1, η^2 — показатели роста, $p(x)$ — функция ресурса. Ареалом обитания является отрезок $[0,a]$.

Краевые и начальные условия имеют вид

$$u(0,t) = u(a,t) = 0, \quad v(0,t) = v(a,t) = 0, \tag{5}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x). \tag{6}$$

Для реализации численного решения системы используется метод конечных разностей. Вводится сетка: $x_j = jh$, $j = 0,\dots,n+1$, $h = \frac{a}{n+1}$. Плотности u и v вычисляются в узлах x_j, $j = 1,\dots,n$, потоки — в смещенных на полшага узлах $x_{j+\frac{1}{2}}$, $j = 0,\dots,n$. Получается система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{u}_j = -\frac{1}{h}\Big(q^1_{j+\frac{1}{2}} - q^1_{j-\frac{1}{2}}\Big) + \eta^1_j u_j\Big(1 - \frac{u_j+v_j}{p_j}\Big), \tag{7}$$

$$\dot{v}_j = -\frac{1}{h}\Big(q^2_{j+\frac{1}{2}} - q^2_{j-\frac{1}{2}}\Big) + \eta^2_j v_j\Big(1 - \frac{u_j+v_j}{p_j}\Big), \tag{8}$$

$$q^1_{j+\frac{1}{2}} = -k^1_{j+\frac{1}{2}}\frac{u_{j+1}-u_j}{h} + \alpha\,\frac{u_{j+1}-u_j}{2h}\,\big(p(x_{j+1}) - p(x_j)\big), \tag{9}$$

$$q^2_{j+\frac{1}{2}} = -k^2_{j+\frac{1}{2}} \frac{v_{j+1} - v_j}{h} + \alpha \frac{v_{j+1} - v_j}{2h} \big(p(x_{j+1}) - p(x_j)\big). \tag{10}$$

Система дополняется дискретными аналогами краевых условий:

$$u_0 = u_{n+1} = 0, \quad v_0 = v_{n+1} = 0. \tag{11}$$

С помощью пакета MATLAB были проведены эксперименты по инвазии для функции ресурса $p(x) = 1 + 0{,}9 \sin \frac{\pi x}{a}$, параметра миграции $\alpha = 0{,}1$ и сетки из 16 и 32 узлов. Результаты показали, что в зависимости от значений параметров k^1, k^2 возможны три сценария развития популяций: выживание одной из двух популяций или их сосуществование. При соотношении $k^1 < k^2$ популяция-хозяин не позволяет инвайдеру остаться на ареале; при $k^1 > k^2$ вытесняется резидент. Равенство $k^1 = k^2$ отвечает сосуществованию популяций.

Было проведено качественное сравнение результатов с данными статьи [2] при $\eta^1 = \eta^2 = p(x)$. Непрерывному семейству сосуществующих популяций отвечает набор параметров, для которых выполнено равенство $k^1 = k^2$. При малых значениях диффузионных параметров и $k^1 > k^2$ ($k^1 < k^2$) реализуется сценарий вытеснения инвайдера (хозяина), а при достаточно больших k^1 и k^2 — ситуация обратная: при $k^1 < k^2$ ($k^1 > k^2$) выживает хозяин (инвайдер). С увеличением параметра α растет также величина $k^1 = k^2$, при которой меняется сценарий выживания (вытеснения).

Литература

1. *Будянский А. В., Цибулин В. Г.* Влияние направленной миграции на формирование пространственных популяционных структур // Биофизика.—2015.—(в печати).
2. *Lam K.-Y., Lou Lou Y.* Evolutionarily stable and convergent stable strategies in reaction-diffusion models for conditional dispersal // Bull. Math. Bio.—2009.—№ 76.—P. 261–291.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

А. К. Баззаев (Россия, Владикавказ; ВИУ, СОГУ),
М. М. Лафишева (Россия, Нальчик; КБГУ),
М. Х. Шхануков-Лафишев (Россия, Нальчик; КБГУ)

Постановка задачи

В цилиндре $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < \ell, 0 < t \leqslant T\}$ рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \partial_{0x}^{\beta} u + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \beta_1(t) u - \mu_1(t), & x = 0, \\ -\dfrac{\partial u}{\partial x} = \beta_2(t) u - \mu_2(t), & x = \ell, \end{cases} \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{3}$$

где $\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u_\tau(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha}$, $\partial_{0x}^{\beta} u = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int_0^x \frac{u_{\eta\eta}(\eta,t)d\eta}{(x-\eta)^{\beta-1}}$ — соответственно регуляризованные дробные производные по времени порядка α, $0 < \alpha < 1$ и по пространственной координате x порядка β, $1 < \beta \leqslant 2$; β_1, $\beta_2 \geqslant \beta_* > 0$.

Дифференциальной задаче (1)–(3) поставим в соответствие разностную схему

$$\begin{gathered} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j} \left(t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha} \right) y_t^s = \\ = \frac{1}{\Gamma(3-\beta)} \sum_{s=1}^{i} \left(x_{i-s+1}^{2-\beta} - x_{i-s}^{2-\beta} \right) \left(\sigma \widehat{y}_{\overline{x}x,s} + (1-\sigma) y_{\overline{x}x,s} \right) + \varphi_i, \end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \left(y_{x,0} - \beta_1 y_0\right)^{(\sigma)} = -\mu_1, \\ -\left(y_{\overline{x},N} + \beta_2 y_N\right)^{(\sigma)} = -\mu_2, \end{cases} \tag{5}$$

$$y^{(\sigma)} = \sigma \widehat{y} + (1-\sigma) y,$$

$$y(x,0) = u_0(x), \tag{6}$$

где $\widehat{y} = y^{j+1}$, $y = y^j$, $y_{x,0} = (y_1 - y_0)/h$, $y_{\overline{x},N} = (y_N - y_{N-1})/h$, β_1, $\beta_2 \geqslant \beta_* > 0$.

Разностная схема (4)–(6) имеет порядок аппроксимации $O(h + \tau)$.

С помощью принципа максимума [1, 2] получена априорная оценка

$$\begin{gathered} \left\| y^{j+1} \right\|_{C_h} \leqslant \left\| u_0(x) \right\|_{C_h} + \frac{2}{\beta_*} \left(\max_{0 \leqslant k \leqslant j} |\mu_1(t_k)| + \max_{0 \leqslant k \leqslant j} |\mu_2(t_k)| \right) + \\ + \frac{\ell^{\beta-1} \Gamma(2-\beta)}{\beta_*} \max_{0 < t' \leqslant (j+1)\tau} \left\| \varphi(x,t') \right\|_{C_h}, \end{gathered} \tag{7}$$

где $\|y\|_{C_h} = \max_{x \in \omega_h} |y(x)|$.

Равномерная сходимость разностной схемы

Подставим $y = z + u$ в уравнение (4):

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j} \left(t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha} \right) z_t^s = \frac{1}{\Gamma(3-\beta)} \sum_{s=1}^{i} \left(x_{i-s+1}^{2-\beta} - x_{i-s}^{2-\beta} \right) z_{\overline{x}x,s}^{j+1} + \psi_i, \tag{8}$$

$$\begin{cases} z_{x,0} = \beta_1 z_0 - \nu_1, \\ -z_{\overline{x},N} = \beta_2 z_N - \nu_2, \end{cases} \tag{9}$$

$$z(x,0) = 0, \tag{10}$$

где $\psi_i = O(h+\tau)$, $\nu_1, \nu_2 = O(h)$.

Применяя (7) к решению задачи (8)–(10), получим равномерную сходимость схемы (4)–(6): $\|y-u\|_{C_h} \leqslant M(h+\tau)$.

Литература

1. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем.—М.: Наука, 1973.—415 с.
2. *Самарский А. А.* Теория разностных схем.—М.: Наука, 1977.—656 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЦИАЛЬНОЙ НАПРЯЖЕННОСТИ С УЧЕТОМ МИГРАЦИИ

Е. К. Басаева (Россия, Владикавказ, ЮМИ; СОГУ),
Е. С. Каменецкий (Россия, Владикавказ, ЮМИ; ВНЦ РАН),
З. Х. Хосаева (Россия, Владикавказ; ВНЦ РАН)

На определенных этапах развития общества социальная напряженность определяется преимущественно экономическими факторами и миграцией. В частности, рост социальной напряженности в СССР в 60-е гг. можно объяснить резко возросшей миграцией населения из сел в города. Будем считать, что изменение напряженности населения (без учета мигрантов) аддитивно зависит от миграционного притока и экономических факторов:

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \gamma_{\text{э}}(P_{\text{э}} - P_{\Sigma}) + \frac{\Delta N}{N} P_{\text{м}}(P_{\text{м}} - P_{\Sigma}), \tag{1}$$

где P — напряженность общества, $P_{\text{э}}$ — напряженность, к которой стремится общество под влиянием изменения экономической ситуации, $P_{\text{м}}$ — напряженность мигрантов, P_{Σ} — общая (суммарная) напряженность общества, ΔN — количество мигрантов, N — численность населения в тех местах, куда прибывают мигранты.

Слагаемые уравнения (1) получены из математической модели коллективных действий [1] в предположении отсутствия тенденции к усилению воздействия. Такая ситуация возникает, к примеру, если мигранты относятся к той же этнической группе, что и население принимающих населенных пунктов.

Общая напряженность общества определяется суммированием напряженностей населения принимающих населенных пунктов и мигрантов с учетом их долей:

$$P_{\Sigma} = P\left(1 - \frac{\Delta N}{N}\right) + P_{\text{м}}\frac{\Delta N}{N}.$$

Для предварительных оценок можно считать, что напряженность мигрантов втрое больше, чем напряженность принимающего населения $P_{\text{м}} = 3P$ [2, 3].

Для определения $P_{\text{э}}$ используется выражение [4]:

$$P_{\text{э}} = \left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(b\frac{\Delta E}{E}\right)\right)\right]^n,$$

в котором E — уровень ВВП, а ΔE — его приращение (и то и другое с лагом в три года), b и n — константы.

Проведены расчеты с шагом равным одному году. В качестве числовых индикаторов напряженности общества, с которыми сравнивались результаты расчетов по модели, нами взяты число убийств и число самоубийств на 100 тысяч человек населения, нормированные с помощью выражения

$$P_t = 0{,}05 + \frac{x_t - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}\,0{,}4.$$

Проведенные расчеты указывают на существенный вклад напряженности самих мигрантов $P_{\text{м}}$ в общей напряженности общества. Именно она обеспечивает заметный рост напряженности в 60-е годы и некоторое ее увеличение во второй половине 70-х. Почти полное прекращение миграции во второй половине 80-х привело к заметному падению напряженности в 1985–1987 гг. Это падение часто связывают с перестройкой Горбачева и антиалкогольной компанией, но, судя по полученным результатам, причиной является почти полное прекращение миграции в сочетании с ростом экономики в начале 80-х гг. Ухудшение же экономического состояния, начавшееся в 1985 г., привело к росту социальной напряженности общества. Таким образом, предложенная модель удовлетворительно описывает изменение нормированных индикаторов напряженности общества.

Литература

1. *Bosse E., Hoogendoorn M., Klein M. C. A., Treur J., van der Wal C. N., van Wissen A.* Modelling collective decision making in groups and crowds: Integrating social contagion and interacting emotions, beliefs and intentions // Auton. Agent Multi-Agent Syst.—2013.—Vol. 27.—P. 52–74.
2. *Адаевская Т. И.* Население городов СССР в 1060–1980 гг. // Вестн. Гуманитар. ин-та.—2008.—№ 1.
3. *Цориева Е.С.* Преступность вынужденных мигрантов.—Владикавказ: ВИУ, 2004.—135 с.
4. *Басаева Е.К., Каменецкий Е.С., Хосаева З.Х.* Количественная оценка фоновой социальной напряженности // Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование: тез. докл. муждунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–13 сентября 2014 г.). — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014.—С. 94–95.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПРОМЕРЗАНИЯ ОДНОМЕРНЫМ УРАВНЕНИЕМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ОПЕРАТОРОМ ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

В. Д. Бейболаев (Россия, Махачкала; ДГУ, ДГИНХ),
М. А. Назаралиев (Россия, Махачкала; ДГУ)

Одним из продуктивных моделей является математическая модель промерзания, описываемая одномерным уравнением теплопроводности (задача Стефана). Задача Стефана описывает явления тепломассопереноса в средах с фазовыми переходами, сопровождающиеся выделением или поглощением тепла.

Новый этап развития задачи Стефана связан с его распространением на системы с фрактальной структурой. В таких системах возникает необходимость учета нелокальных эффектов, связанных с учетом памяти и пространственных корреляций. Процессы переноса тепла при этом описываются на основе дифференциальных уравнений в производных дробного порядка [1, 2]. В работе [3] показано, что учет эффектов памяти приводит к зависимости координаты межфазной границы от времени. Несомненный интерес представляет обобщение задачи Стефана с учетом особенностей теплопереноса на межфазной границе с учетом нелокальных эффектов не только по времени (эффект памяти), но и по пространству (эффект пространственных корреляций) [4, 5].

В качестве математической модели процесса промерзания в средах с фрактальной структурой рассмотрим следующую задачу:

$$\partial_{0t}^{\alpha} T_1(x,\,t) = a_1 \frac{\partial^2 T_1(x,\,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \xi(t),\ t > 0, \tag{1}$$

$$\partial_{0t}^{\alpha} T_2(x,\,t) = a_2 \frac{\partial^2 T_2(x,\,t)}{\partial x^2}, \quad \xi(t) < x < L,\ t > 0,$$

$$T(x,\,0) = T_0,$$

$$T(0,\,t) = T_c, \quad \frac{\partial T(L,\,T)}{\partial x} = 0, \quad t > 0,$$

$$x = \xi(t): \begin{cases} T_1 = T_2 = T_3, \\ \lambda_1 \dfrac{\partial T_1}{\partial x} - \lambda_2 \dfrac{\partial T_2}{\partial x} = Q_f \rho w \, \dfrac{d\xi}{dt}, \end{cases} \tag{2}$$

где $0 < \alpha \leqslant 1$, ρ — плотность грунта, w-влажность грунта, постоянные температуры $T_c < T_3 < T_0$, $\partial_{0t}^{\alpha} T(x,\,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \frac{T'_t(x,\,s)}{(t-s)^{\alpha}}\, ds$ — частная дробная производная Caputo.

Задача решена численным методом. Для этого вводим равномерную сетку по пространственной переменной:

$$x_m = mh, \quad m = 0,\,1,\ldots,M, \quad h = \frac{L}{N},$$

и неравномерну сетку по времени:

$$t_{n+1} = t_n + \tau_{n+1}, \quad n = 0,\, 1, \ldots, N-1, \quad t_0 = 0, t_N = t_{\text{кон.}}, \quad \tau_{n+1} > 0.$$

Шаг по времени τ_{n+1}, $n = 0,\, 1,\, \ldots, N-1$, нужно выбрать таким образом, чтобы за этот временной промежуток (от t_n до t_{n+1}) граница фазового перехода сдвинулась ровно на один шаг пространственной сетки. Тогда можно записать $\frac{d\xi}{dl} \approx \frac{h}{\tau_{n+1}}$.

Для частной дробной производной Caputo $\partial_{0t}^{\alpha} T(x,\, t)$ имеет место разностная апроксимация [5]

$$(\partial_{0t}^{\alpha} T)_n = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\cdot\tau} \sum_{k=0}^{n} \left(T^{k+1} - T^k\right)\left(t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}\right) + O(\tau), \tag{3}$$

а для частной производной $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ имеет место аппроксимация

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_m = \frac{T_{m+1} - 2T_m + T_{m-1} h^2 + O(h^2)}{h^2}. \tag{4}$$

Воспользовавшись (3) и (4)

$$\begin{gathered}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\cdot\tau_{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \left(T_{1,\,m}^{k+1} - T_{1,\,m}^{k}\right)\left(t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}\right) = \\ = a_1 \frac{T_{1,\,m+1}^{n+1} - 2T_{1,\,m}^{n+1} + T_{1,\,m-1}^{n+1}}{h^2}, \\ m = 1,\, 2, \ldots, m^* - 1, \quad T_1\big|_{m=1} = T_c, \quad T_1\big|_{m=m^*} = T_3,\end{gathered} \tag{5}$$

где $m = m^*$ — граница фазового перехода.

Тогда разностная схема второй части уравнений будет иметь вид

$$\begin{gathered}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\cdot\tau_{n+1}} \sum_{k=0}^{n} big(T_{2,\,m}^{k+1} - T_{2,\,m}^{k}\right)\left(t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}\right) = \\ = a_1 \frac{T_{2,\,m+1}^{n+1} - 2T_{2,\,m}^{n+1} + T_{2,\,m-1}^{n+1}}{h^2}, \\ m = m^* + 1, \ldots, M-1, \quad T_2\big|_{m=m^*} = T_3, \quad \frac{\partial T_2}{\partial x}\bigg|_{m=M} = 0.\end{gathered}$$

Проведем дискретизацию граничного условия в случае $x = \xi(t)$

$$\lambda_1 \frac{T_{1,\,m^*} - T_{1,\,m^*-1}}{h} - \lambda_2 \frac{T_{2,\,m^*+1} - T_{2,\,m^*}}{h} = Q_f \rho w \, \frac{h}{\tau_{n+1}},$$

т. е.

$$\lambda_1 \frac{T_3 - T_{1,\,m^*-1}}{h} - \lambda_2 \frac{T_{2,\,m^*+1} - T_3}{h} = Q_f \rho w \, \frac{h}{\tau_{n+1}}.$$

Таким образом,

$$\tau_{n+1} = \frac{Q_f \rho w h^2}{\lambda_1 \left(T_3 - T_{1,\,m^*-1}\right) - \lambda_2 \left(T_{2,\,m^*+1} - T_{2,\,m^*}\right)}.$$

Шаг по времени зависит от температуры. Поле температуры поэтому определили методом простой итерации.

Литература

1. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.— Минск: Наука и Техника, 1987.—498 с.
2. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение.— М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.—272 с.
3. *Liu Junyi, Xu Mingyu.* Some exact solutions to Stefan problems with fractional and applications // J. Math. Anal. Appl.—2009.—Vol. 351.—P. 536–542.
4. *Алхасов А. Б., Мейланов Р. П., Шабанова М. Р.* Уравнение теплопроводности в производных дробного порядка // Иженер.-физ. журн.—2011.—Т. 84, № 2.—С. 309–317.
5. *Мейланов Р. П., Бейбалаев В. Д., Шахбанова М. Р.* Прикладные аспекты дробного исчисления.—Palmarium Acad. Publ., 2012.—135 с.
6. *Бейбалаев В. Д., Абдуллаев И. А., Наврузова К. А., Гаджиева Т. Ю.* О разностных методах решения задачи Коши для ОДУ с оператором дробного дифференцирования // Вестн. ДГУ.—2014.—Вып. 6.—С. 53–61.

МЕХАНИЗМ ПОБУЖДЕНИЯ ПРИ РАСПРЕДЕЛЕНИИ РЕСУРСОВ

О. И. Горбанева
(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Будем рассматривать одноуровневую систему управления, состоящую из n равноправных элементов, каждый из которых имеет некоторое количество ресурсов r_i. Часть средств каждый из этих распорядителей передает для целевого использования, оставшуюся часть оставляет себе на нецелевые расходы. Все распорядители участвуют в доходе от целевой деятельности и имеют свои функции выигрыша. Модель строится в виде игры двух лиц в нормальной форме, в которой ищется равновесие по Нэшу. В функцию выигрыша каждого игрока включаются два слагаемых: доход от нецелевой деятельности и соответствующая доля дохода от целевой деятельности системы. Функции выигрыша имеют следующий вид:

$$g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) = a_i(r_i - u_i) + b \cdot c\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right) \to \max_{u_i};$$

при ограничениях

$$0 \leqslant u_i \leqslant r_i, \quad i = 1, n,$$

и условиях на функции a, b, и c

$$a_i \geqslant 0; \quad \frac{\partial a_i}{\partial u_i} \leqslant 0, \quad \frac{\partial a_i}{\partial u_{j\neq i}} \geqslant 0, \quad i = 1, n,$$

$$b_i \geqslant 0; \quad \frac{\partial b_i}{\partial u_i} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \quad \frac{\partial c}{\partial u_i} \geqslant 0, \quad i = 1, n.$$

Здесь u_i — доля ресурсов, выделенных i-м элементом на развитие системы (соответственно, $r_i - u_i$ остается на нецелевое использование ресурсов в личных интересах), g_i — функция выигрыша i-го игрока, a_i — функция частного выигрыша i-го игрока, b_i — доля от дохода общей деятельности, получаемая i-м игроком; c — целевой доход системы.

Введем функцию общественного состояния

$$g_0(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i(r_i - u_i) + c\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right) \to \max_{u_i};$$

и предположим, что имеется субъект, который максимизирует функцию общественного благосостояния. Назовем этот субъект Принципалом и на основе рассмотренной игры построим новую игру, дополняя множество участников Принципалом (участник с индексом 0), множество стратегий — стратегией Принципала: назначать либо s_i при ограничении $\sum_{i=1}^{n} s_i = 1$ (экономический механизм), либо назначением величин q_i, меньше которой i-й элемент не может назначить величину u_i, а в качестве целевой функции Принципала возьмем функцию общественного благосостояния.

Будем рассматривать механизмы согласования с обратной связью, т. е. $s_i = s_i(u_i)$, $q_i = q_i(u_i)$. Для исследования модели применяется либо эмпирический подход, учитыващий широко распространенные на практике методы распределения ресурсов, типа равномерный, пропорциональный и т. д, либо теоретический, основанный на применении теоремы Гермейера к игре Г2.

Кроме того, при рассмотрении административного механизма при распределении ресурсов вполне естесственно рассмотреть возможный механизм коррупции, т. е. $q_i = q_i(u_i, b_i)$. Также нелишним буде рассмотреть механизм коррупции при экономическом механизме согласования общественных и частных интересов $s_i = s_i(u_i, b_i)$.

Литература

1. *Gorbaneva O. I., Ougolnitsky G.* A problem of purpose-resource use in two-level control systems // Game Theory and Management.—2013.—P. 78–81.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ УСТОЙЧИВО СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ЖИДКОСТЕЙ[1]

Н. Ф. Димитриева
(Украина, Киев; ИГМ НАНУ)

Построение и численная реализация полных моделей механики неоднородных сплошных сред является одной из наиболее актуальных научных проблем. Эффекты стратификации находят разнообразные приложения в гидроаэродинамике природных систем (интенсивные долинные или горные ветры в атмосфере и склоновые потоки в океане, самодвижение объектов). Устойчиво стратифицированная среда находится в состоянии покоя, только когда градиенты плотности параллельны направлению действия силы тяжести. Прерывание молекулярного потока стратифицирующих компонент на непроницаемых границах произвольной формы нарушают условия равновесия и создают течения, индуцированные диффузией (ТИД).

Для математического описания изучаемых физических процессов выбрана система дифференциальных балансных уравнений механики неоднородных жидкостей в приближении Буссинеска и пренебрежении сжимаемостью, поскольку скорости изучаемых течений малы по сравнению со скоростью звука [1]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_{00}}\nabla P + \nu\triangle\mathbf{v} - s\mathbf{g}, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0,$$
$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla s = \kappa_S\triangle s + \frac{v_y}{\mathcal{A}}, \quad \rho = \rho_{00}(\exp(-y/\mathcal{A}) + s),$$

с начальными и граничными условиями

$$\mathbf{v}, s\big|_{t\leqslant 0} = 0, \quad \mathbf{v}|_\Sigma = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \mathbf{n}}\Big|_\Sigma = \frac{\partial s}{\partial \mathbf{n}}\Big|_\Sigma + \frac{1}{\mathcal{A}}\frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad s|_{x,y\to\infty} = 0,$$

где $S = S_0(y) + s$ — полная соленость, s — ее возмущенная составляющая, ρ_{00} — плотность на нулевом уровне, $\rho(y)$ — невозмущенное распределение плотности, которое задается профилем солености $S_0(y)$, $\mathbf{v}$ — скорость жидкости, P — давление, ν — коэффициент кинематической вязкости, κ_S — коэффициент диффузии соли, t — время, g — ускорение свободного падения, ∇ и $\triangle$ — операторы Гамильтона и Лапласа, $\mathcal{A} = (d\ln\rho/dy)^{-1}$ — длина плавучести, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности препятствия Σ.

Поставленная задача характеризуется большим числом линейных масштабов: длина плавучести $\mathcal{A}$, размер препятствия L, вязкий $\delta_N^\nu = \sqrt{\nu/N}$ и диффузионный $\delta_N^{\kappa_S} = \sqrt{\kappa_S/N}$ микромасштабы. Существенные различия значений

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 15-37-50382.

масштабов указывают на сложность внутренней структуры даже такого медленного течения, которое порождается малыми силами плавучести вследствие неоднородности молекулярного потока стратифицирующего компонента. Обычно тонкоструктурные эффекты вносят небольшие поправки в значения динамических характеристик течений, но формируют большие градиенты [2].

Численное моделирование поставленной задачи проводится с использованием метода конечных объемов в открытых пакетах программ SALOME, OpenFOAM и ParaView [3]. Для учета эффектов диффузии в стратифицированных жидкостях был разработан решатель stratifiedFoam на основе стандартного icoFoam, реализующего нестационарные уравнения Навье — Стокса для однородной жидкости. Отработана процедура построения качественной расчетной сетки, удовлетворяющей требованиям разрешения всех микромасштабов задачи в высокоградиентных областях течения. Расчеты, проведенные в параллельном режиме с использованием вычислительных ресурсов web-лаборатории UniHUB (`www.unihub.ru`), показали высокую работоспособность предложенной математической модели.

Литература

1. *Чашечкин Ю. Д.* Дифференциальная механика жидкостей: согласованные аналитические, численные и лабораторные модели стратифицированных течений // Вестн. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естеств. науки.—2014.—№ 6.—С. 67–95.
2. *Димитриева Н. Ф., Чашечкин Ю. Д.* Численное моделирование динамики и структуры индуцированного диффузией течения на клине // Вычислит. механика сплошных сред.—2015.—Т. 8, № 1.—С. 102–110.
3. *Димитриева Н. Ф., Загуменный Я. В.* Численное моделирование стратифицированных течений с использованием OpenFOAM // Тр. Ин-та систем. прогр.—2014.—Т. 26, № 5.—С. 187–200.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОСЕДАНИЯ БУГРА ГРУНТОВЫХ ВОД В ОДНОРОДНЫХ СЛОЯХ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ВКЛЮЧЕНИЙ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ

В. И. Дорофеева (Россия, Орел; ОГУ),
И. В. Афанаскина (Россия, Орел; ОГУ)

Система интегрального и дифференциального уравнений описывает опускание бугра грунтовых вод под действием силы тяжести [1]:

$$g - 2G[g, L_t] = -2\Pi, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \mathbf{V}[g, L_t] \quad \text{на} \quad L_t,$$

где [1]

$$G[g, L_t](M) = \int\limits_{L_t} g(N)\,\Omega(M,N)\,dl_N,$$

$$\Omega = P(N)\,\frac{\partial \Phi_1(M,N)}{\partial \mathbf{n}_N}, \quad \Phi_1, \ \Pi = y,$$

$$\mathbf{V}[g, L_t](M) = \operatorname{grad} G[g, L_t](M) = \int\limits_{L_t} \frac{\partial g(N)}{\partial \mathbf{l}_N}\,\mathbf{V}_2(M,N)\,dl_N,$$

$$\mathbf{V}_2 = \frac{1}{H(M)}\left(\frac{\partial \Psi_2(M,N)}{\partial y_M}\,\mathbf{e}_x - \frac{\partial \Psi_2(M,N)}{\partial x_M}\,\mathbf{e}_y\right).$$

Начальное положение бугра описывается гладкой кривой L_t. Область совместной фильтрации жидкостей может быть ограниченна непроницаемой прямой L_1, разделяющей грунт и непроницаемые породы. В области фильтрации имеется включение произвольной формы с проницаемостью λ.

Задача исследовалась при наличии одного включения с проницаемостью $\lambda = 0,4$. Первоначальная высота бугра $H_0 = 1,451$. Высота, на которой произошло выравнивание уровня воды $H = 0,7549$. На рис. 1 представлено поле скоростей в области потекания процесса.

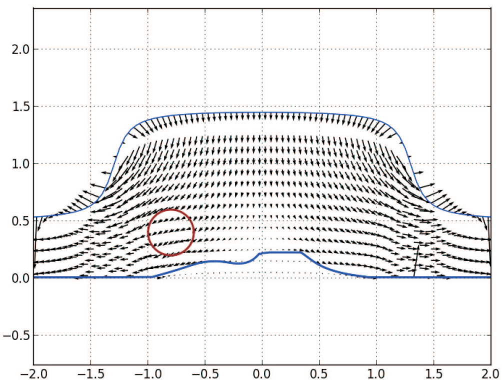

Рис. 1. Поле скоростей при $n = 500$, $dt = 0{,}0025$, $\lambda = 0{,}4$.

В таблице 1 представлена зависимость времени T от числа точек разбиения n границы L_t в каждый момент времени.

Таблица 1

Зависимость времени T от числа точек разбиения n

n	400	600	800	1000
$T_{\Delta t}$	12,45	11,5	11,49	11,49
$\eta_{\Delta t}, \%$	—	7,6	0,09	0
$T_{\Delta t/2}$	12,015	11,185	11,18	1,18
$\eta_{\Delta t/2}, \%$	—	6,91	0,04	0
$T_{\Delta t/4}$	11,7125	10,9525	10,9425	10,9425
$\eta_{\Delta t/4}, \%$	—	6,49	0,09	0

Поле скоростей соответствует характеру протекаемого процессса, а анализ таблицы показывает, что с ростом n величина η уменьшается, а значит имеет место «практическая сходимость». Дальнейшие исследования будут выполняться для включений произвольной формы и произвольным размещением в области процесса.

Литература

1. *Никольский Д. Н., Дорофеева В. И.* Математическое моделирование двумерного процесса изменения уровня грунтовых вод под действием силы тяжести методом дискретных особенностей // Вычислит. методы и программирование.—2011.—№ 12.—С. 85–89.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тезисы докладов XII Международной научной конференции (с. Цей, 12–18 июля 2015 г.)

О РЕКОНСТРУКЦИИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ЦИЛИНДРАХ[1]

В. В. Дударев (Россия, Владикавказ; ЮМИ),
Р. М. Мнухин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

В настоящее время область применения функционально-градиентных материалов (ФГМ) постоянно расширяется. Это обусловлено в первую очередь их преимуществами по сравнению с обычными однородными структурами и слоистыми композитами: уменьшенный риск возникновения отслоения и трещин, сочетание различных физико-механических свойств, изменяющихся по моделируемым законам в теле, и другие. Изготовление объектов из ФГМ является сложным технологическим процессом, который обычно включает в себя такие операции, как напыление, послойное прессование, спекание, плавление и т. д. В силу несовершенства реализации этих операций и последующей эксплуатации, в изделии обычно возникают предварительные напряжения (ПН). При этом концентрация этих напряжений наблюдается в области дефекта или зоны деструкции. Одним из наиболее эффективных методов неразрушающей диагностики ПН является метод акустического зондирования [1].

В работе рассмотрена задача о радиальных колебаниях функционально-градиентного полого цилиндра с учетом ПН в рамках модели Треффтца — Гузя [2]. Колебания вызываются распределенной периодической нагрузкой, приложенной на внешней границе. Принято, что все величины, характеризующие свойства цилиндра и законы распределения ПН, являются функциями только радиальной координаты. Решение прямой задачи об определении функции смещения для общего случая неоднородности реализовано численно с помощью метода пристрелки. В качестве законов изменения поля ПН рассмотрены функции, характеризующие остаточное напряженное состояние при наличии пластической зоны, образовавшейся в результате действия эксплуатационного внутреннего давления. Проведен анализ изменения амплитудно-частотной характеристики в зависимости от уровня ПН.

Для решения обратной задачи о реконструкции предварительного напряженного состояния по данным об изменении резонансных частот колебаний рассмотрены задачи о свободных колебаниях цилиндра при наличии и отсутствии ПН. С помощью интегральных преобразований получено соотношение, связывающее поправку к резонансной частоте колебаний преднапряженного цилиндра с законами распределения компонент ПН и формой свободных колебаний цилиндра

[1]Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований по стратегическим направлениям развития науки Президиума РАН № 1 «Фундаментальные проблемы математического моделирования», № 114072870112, «Математическое моделирование неоднородных и многофазных структур» и Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 13-01-00196, № 14-01-31393.

без ПН. На основе этого соотношения с учетом дополнительных данных о значениях двух резонансных частот построена численная схема для определения уровня ПН и радиуса зоны пластичности. Проведены вычислительные эксперименты по решению обратной задачи для различных законов неоднородности, сделан анализ точности полученных результатов и даны практические рекомендации по осуществлению наиболее точной реконструкции.

Литература

1. *Ватульян А. О., Дударев В. В., Недин Р. Д.* Предварительные напряжения: моделирование и идентификация.—Ростов н/Д.: Изд–во ЮФУ, 2014.—206 с.
2. *Ватульян А. О., Дударев В. В., Богачев И. В.* Об определении предварительного напряженного состояния в трубе // Докл. АН.—2014.—Т. 456, № 3.—С. 299–301.

АСИМПТОТИКА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПО ВРЕМЕНИ РЕШЕНИЙ В СИСТЕМЕ РЭЛЕЯ С ДИФФУЗИЕЙ

А. В. Казарников (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
С. В. Ревина (Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Рассматривается система Фитцхью — Нагумо с диффузией:

$$\begin{aligned} v_t &= \nu_1 \Delta v + \varepsilon(w - \alpha v - \beta), \\ w_t &= \nu_2 \Delta w - v + \mu w - w^3, \end{aligned} \tag{1}$$

где $v = v(x,t)$, $w = w(x,t)$, $x \in D$, $t > 0$, $D \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ — ограниченная область, $\mu \in \mathbb{R}$ — управляющий параметр, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\varepsilon > 0$, $\nu_1 > 0$, $\nu_2 > 0$ — фиксированные параметры. Положив в (1) $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\varepsilon = 1$ и взяв коэффициенты диффузии равными $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, получим систему Рэлея с диффузией:

$$v_t = \nu \Delta v + w; \quad w_t = \nu \Delta w - v + \mu w - w^3. \tag{2}$$

Целью настоящей работы является построение вторичных, периодических по времени решений, ответвляющихся от тривиального нулевого решения при изменении управляющего параметра μ. Известно, что в случае краевых условий Неймана диффузия не оказывает влияния на характер автоколебаний и в этом случае наблюдается пространственно-однородный автоколебательный режим. В настоящей работе в качестве краевых условий рассматриваются условия Дирихле и смешанные краевые условия. Подробные выкладки для случая одной пространственной переменной приведены в [1]. Для получения вторичных решений применен метод Ляпунова — Шмидта в форме, развитой В. И. Юдовичем [2].

Литература

1. *Казарников А. В., Ревина С. В.* Бифуркационное поведение решений системы Рэлея с диффузией в случае одной пространственной переменной // Тр. XVII Междунар. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды».—Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2014.—Т. 2.—С. 6–10.
2. *Юдович В. И.* Исследование автоколебаний сплошной среды, возникающих при потере устойчивости стационарного режима // Прикл. математика и механика.—2013.—Т. 36, № 3.—С. 450–459.

О ВЫЧИСЛЕНИИ ОДНОРОДНЫХ СОЛИТОНОВ РИЧЧИ НА ГРУППАХ ЛИ МАЛЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

П. Н. Клепиков (Россия, Барнаул; АлтГУ),
Д. Н. Оскорбин (Россия, Барнаул; АлтГУ),
Е. Д. Родионов (Россия, Барнаул; АлтГУ)

Полное риманово многообразие (M, g) называется солитоном Риччи, если метрика g удовлетворяет уравнению (см. [1])

$$r = C \cdot g + L_X g, \tag{1}$$

где r — тензор Риччи, $C \in \mathbb{R}$ — константа, $L_X g$ — производная Ли метрики g по направлению полного дифференцируемого векторного поля X. Заметим, что данное уравнение является, в известном смысле, обобщением уравнения Эйнштейна: $r = C \cdot g$. Если $M = G/H$ — однородное пространство, то однородная риманова метрика, удовлетворяющая (1), называется однородным солитоном Риччи. В этом случае однородные эйнштейновые метрики и однородные солитонные метрики изучались в работах [2–4].

Рассмотрим также алгебраические солитоны Риччи, которые тесно связаны с однородными солитонами Риччи (см. [5]), и определяются, в некотором ортонормированном базисе, формулой (см. [4]):

$$\mathrm{Ric} = C \cdot \mathrm{Id} + D, \tag{2}$$

где Ric — матрица оператора Риччи, $C \in \mathbb{R}$ — константа, Id — единичная матрица, D — матрица некоторого дифференцирования алгебры $\mathfrak{g}$.

В данной работе с помощью компьютерных моделей, реализованных в среде пакета аналитических вычислений Maple, получена классификация алгебраических солитонов Риччи (2) на четырехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Кроме того, доказано отсутствие нетривиальных решений уравнений солитонов Риччи на четырехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой в классе левоинвариантных векторных полей, а в случае трехмерных групп Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой найдены все решения уравнения солитонов Риччи в случае, если X — левоинвариантное векторное поле.

Литература

1. *Hamilton R. S.* The Ricci flow on suraces // Contemporary Math.—1988.—Vol. 71.—P. 237–261.
2. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна: В 2 томах.—М.: Мир, 1990.
3. *Arroyo R. M., Lafuente R.* Homogeneous Ricci solitons in low dimensions, 2013.—URL: http://arxiv.org/abs/1312.7461.
4. *Lauret J.* Ricci soliton solvmanifolds // J. Reine Angew. Math.—2011.—Vol. 650.—P. 1–21.
5. *Jablonski M.* Homogeneous Ricci solitons are algebraic, 2013.—URL: http:// arxiv.org/abs/ 1309.2515.

ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ЭВОЛЮЦИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ РАЗЛИЧНЫХ ВЯЗКОСТЕЙ В АНИЗОТРОПНОМ ПЛАСТЕ ГРУНТА[1]

О. В. Костин

(России, Орел; Академия ФСО России)

Поставлена и исследована задача эволюции границы раздела жидкостей Γ_t для двумерного течения в анизотропном тонком недеформируемом пласте грунта с тензором проницаемости $K = (K_{ij})$ $(i, j = 1, 2)$. Течение жидкостей вязкостей μ_1 и μ_2 занимающих области D_1 и D_2, описываем во всей области $D = D_1 \cup D_2$ плоскости z обобщенным потенциалом $\varphi(z, t)$ и функцией тока $\psi(z, t)$. Функции φ и ψ зависят от $z = x + iy$ и времени t. Функции $\varphi(z, t)$ и $\psi(z, t)$ всюду в области D за исключением их изолированных особых точек удовлетворяют системе уравнений

$$v_x = K_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = K_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + K_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{1}$$

Полагаем, что заданы источники (стоки) течения в области D слоя проницаемости K. Границы моделируем простыми (без самопересечений) гладкими или кусочно-гладкими замкнутыми кривыми. На границе моделируемой в любой момент времени $t \geqslant 0$ кривой Γ_t должны выполняться условия непрерывности давления и расхода жидкостей (орт нормали к Γ_t направлен внутрь области D_1):

$$\mu_1\varphi^+(z, t) = \mu_2\varphi^-(z, t), \psi^+(z, t) = \psi^-(z, t), \quad z \in \Gamma_t, \tag{2}$$

и условия регулярности:

$$\varphi(z, t) = O\big(|z|^{-1}\big), \quad \big|K(z)\cdot\nabla\varphi(z, t)\big| = O\big(|z|^{-2}\big) \quad \text{при} \quad |z| \to \infty. \tag{3}$$

Положение границы раздела жидкостей Γ_t в любой момент времени $t \geqslant 0$ описываем в плоскости z параметрическими уравнениями (s — параметр): $z = z(t, s)$ $(x = x(t, s),\ y = y(t, s))$, $z \in \Gamma_t$. Полагаем, что в начальный момент времени $t = 0$ положение границы известно ($\Gamma_t = \Gamma_0$):

$$z_0 = z(0, s) \quad (x_0 = x(0, s),\ y_0 = y(0, s)), \quad z_0 \in \Gamma_0. \tag{4}$$

Дифференциальные уравнения продвижения границы Γ_t имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_x^+(x, y, t) + v_x^-(x, y, t)}{2}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{v_y^+(x, y, t) + v_y^-(x, y, t)}{2}, \quad (x, y) \in \Gamma_t. \tag{5}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Орловской области, проект № 12-01-97522 р_центр_а.

Здесь $v_x^{\pm}(x,y,t)$ и $v_y^{\pm}(x,y,t)$ — предельные значения составляющих скорости. Таким образом, задача эволюции двумерной границы раздела жидкостей Γ_t ставится в плоскости z следующим образом. Заданы тензор проницаемости слоя K, вязкости жидкостей, начальное положение границы Γ_0. Найти $\varphi(z,t)$ и положение границы Γ_t в последующие моменты времени $t > 0$. Исследование задачи состоит в интегрировании системы уравнений (4) с учетом условий (1)–(3).

Поставленную задачу (математически весьма трудную) решаем следующим методом. Введем комплексную вспомогательную плоскость ζ, где течение в области D' характеризуется функциями $\varphi(\zeta,t)$ и $\psi(\zeta,t)$. Области D и D' взаимосвязаны гомеоморфным (взаимно однозначным и непрерывным) преобразованием положительно определенным якобианом, которое удовлетворяет уравнению Бельтрами. [1] В этой плоскости введем комплексный потенциал $W(\zeta,t) = \varphi + i\psi/K'$, где $K' = \sqrt{K_s} - i\sqrt{K_a}$ (K_s и K_a — определители симметричной и антисимметричной части тензора $K = (K_{ij})$). Поставленную выше в плоскости z задачу формулируем для $W(\zeta,t)$. Комплексный потенциал $W(\zeta,t)$ представляем обобщенными интегралами Коши. Это позволяет редуцировать в плоскости ζ задачу к сингулярному интегральному уравнению на границе Γ'_t, решаемому известным методом дискретных особенностей [2]. По найденным в плоскости ζ решениям, используя гомеоморфизм $\zeta = \zeta(z)$, отыскивается искомое решение поставленной задачи в плоскости z. Для поставленной задачи исследовано влияние анизотропии грунта, формы первоначальной границы и различия вязкостей жидкостей.

Литература

1. *Пивень В. Ф.* Двумерная задача эволюции границы раздела жидкостей в анизотропном слое пористой среды // Тр. междунар. школ-семинаров «МДОЗМФ».—Орел: ОГУ, 2009.—Вып. 7.—С. 81–91.
2. *Лифанов И. К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.—М.: ТОО Янус, 1995.—520 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ЭВОЛЮЦИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА «РАЗНОЦВЕТНЫХ» ЖИДКОСТЕЙ В АНИЗОТРОПНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Д. В. Крыштопин
(Россия, Орел; ОГУ)

Рассмотрим трехмерную установившуюся фильтрацию несжимаемой жидкости в ортотропной неоднородной и недеформируемой пористой среде. Проницаемость грунта задается диагональным тензором $K_{ij}(M) = K_i(M)\delta_{ij} = k_i\chi(M)\delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$, где M — точка наблюдения, δ_{ij} — символ Кронекера, k_i — положительные константы, $\chi(M)$ — непрерывно дифференцируемая функция, задающая неоднородность среды. Скорость фильтрации $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ определяется обобщенным законом Дарси [1]. Всюду в области течения D (за исключением особых точек) справедливо уравнение неразрывности:

$$\sum_{i=1}^{3} k_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\chi(M)\frac{\partial\varphi(M)}{\partial x_i}\right) = 0, \tag{1}$$

где $\varphi(M)$ — обобщенный потенциал скорости фильтрации, x_1, x_2, x_3 — декартовы координаты. Так как среда неоднородна, то в области фильтрации D может присутствовать сингулярная поверхность $\sigma_0 = \sigma_{01} \cup \sigma_{02}$, на которой функция $\chi(M)$ обращается в бесконечность (на σ_{01}) или в ноль (на σ_{02}). Условия для обобщенного потенциала φ на границе σ_0 будут иметь вид [1]

$$\varphi(M)^{+} = 0, \quad M \in \sigma_{01}; \qquad \left(\chi(M)\frac{\partial\varphi(M)}{\partial n_M}\right)^{+} = 0, \quad M \in \sigma_{02}, \tag{2}$$

где $\vec{n}_M$ — орт нормали к σ_{02}.

Условия регулярности обобщенного потенциала $\varphi(M)$ на бесконечности имеют вид

$$\varphi(M) = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \chi(M)\left|\nabla\varphi(M)\right| = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \to \infty, \tag{3}$$

где r — расстояние от точки наблюдения $M(x_1, x_2, x_3)$ до фиксированной точки $M_0(x_{01}, x_{02}, x_{03})$, $M, M_0 \in D$.

В области фильтрации D присутствует граница Γ_t, разделяющая две жидкости. Полагаем, что фильтрационные свойства жидкостей одинаковы (модель «разноцветных» жидкостей). Положение границы Γ_t описывается параметрическими уравнениями ($t > 0$ — время, s_1, s_2 — параметры):

$$\Gamma_t: \ x_i = x_i\left(t, s_1, s_2\right), \quad i = 1, 2, 3. \tag{4}$$

В начальный момент времени $t = 0$ положение этой границы задано:

$$\Gamma_t = \Gamma_0 : \; x_{0i} = x_i \left(0, s_1, s_2\right), \quad i = 1, 2, 3. \tag{5}$$

Уравнения движения границы раздела жидкостей имеют вид

$$\frac{dx_i}{dt} = k_i \chi(M) \frac{\partial \varphi(M)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \Gamma_t. \tag{6}$$

Таким образом, задано положение границы Γ_0, тензор проницаемости $K(M)$. Необходимо найти положение границы Γ_t (4). Решение задачи состоит в отыскании обобщенного потенциала φ, который удовлетворяет уравнению (1), граничным условиям (2) и условиям на бесконечности (3). Далее интегрируется система уравнений (6) при начальном условии (5).

В работе был исследован неоднородный ортотропный грунт с тензором проницаемости $K(M) = k_i x_3^2 \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$. Получены аналитические формулы для нахождения времени достижения границей Γ_t скважины в различных случаях взаимного расположения скважины, границ Γ_t и σ_{02}. Проведен анализ влияния неоднородности на время достижения границей скважины. С помощью метода Эйлера с адаптивным шагом [2] смоделирована эволюция первоначально плоской границы раздела жидкостей к точечному стоку, расположенному на сингулярной поверхности σ_{02}.

Литература

1. *Пивень В. Ф.* Математические модели фильтрации жидкости.—Орел: Изд-во ОГУ, ПФ «Картуш», 2015.—408 с.
2. *Крыштопин Д. В., Федяев Ю. С.* Математическое моделирование трехмерной эволюции границы раздела «разноцветных» жидкостей в анизотропной однородной пористой среде // Ученые записки Орлов. гос. ун-та.—2014.—№ 6 (62).—С. 17–21.

РАБОТА СОВЕРШЕННОЙ СКВАЖИНЫ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ КОНТУРОМ ПИТАНИЯ В АНИЗОТРОПНОМ ГРУНТЕ[1]

Д. Г. Лекомцев

(Россия, Орел; ОГУ)

Поставленная плоскопараллельная задача о дебите скважин в анизотропном однородном пласте грунта с произвольным контуром питания [1] исследуется в случае кусочно-гладкого (прямоугольного) контура питания. Совершенная эксплуатационная скважина дебита Q расположена в горизонтальном пласте постоянной толщины. Грунт пласта, недеформируемый анизотропный и однородный, характеризуется коэффициентом проницаемости K — тензором второго ранга (вообще говоря, несимметричным). В предположении плоскопараллельности задачи $K = (K_{ij})$, $i, j = 1, 2$. Компоненты (K_{ij}) — постоянные. Для определения вклада в дебит различных компонентов тензора введем коэффициенты $\alpha = K_{22}/K_{11}$, $\beta = (K_{12} + K_{21})/(2K_{11})$, $\gamma = (K_{12} - K_{21})/(2K_{11})$, $\beta^2 < \alpha$. Контур скважины — окружность σ_C: $x^2 + y^2 = R_C^2$. Контур питания — прямоугольник σ_Π, образованный отрезками прямых: $x = B_0/2$, $x = -B_0/2$, $y = A_0/2$, $y = -A_0/2$, где A_0, B_0 — стороны прямоугольника, $A_0 = 1$. Течение происходит в области D, ограниченной контуром $\Sigma = \sigma_\Pi \cup \sigma_C$.

Полагаем, что жидкость несжимаемая и ее течение стационарное. Обобщенный потенциал $\varphi(M) = -(p + \rho\Pi)/\mu$ (Π — потенциал массовой силы — силы тяжести, p — давление, μ и ρ — вязкость и плотность жидкости) и скорость фильтрации $\vec{v}$ течения как функции точки $M = (x, y)$ удовлетворяют всюду в области D, (за исключением изолированных особых точек $\varphi(M)$) уравнению [2]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + K_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = 0, \quad M \in D. \tag{1}$$

Уравнение (1) относится к эллиптическому типу, при условии, что его коэффициенты K_{ij}, $i, j = 1, 2$, удовлетворяют соотношениям $K_{11} > 0$ $(K_{22} > 0)$, $D(K_S) = K_{11}K_{22} - (K_{12} + K_{21})^2/4$. Здесь $D(K_S)$ — определитель симметричной части $K_S = (K + K^T)/2$ тензора K ($K^T = (K_{ji})$ — транспонированный тензор). Уравнение (1) записано в безразмерных величинах [2]. Давления на контурах σ_C и σ_Π постоянные, для $\varphi(M)$ имеем условия (φ_C и φ_Π — константы, $\varphi_C \neq \varphi_\Pi$): $\varphi(M) = \varphi_\Pi,\ M \in \sigma_\Pi,\ \varphi(M) = \varphi_C,\ M \in \sigma_C$.

Трудность решения поставленной задачи обусловлена сложным видом уравнения (1). Решение значительно упрощается, если перейти на вспомогательную плоскость $O\xi\eta$, используя гомеоморфные (аффинные) преобразования координат (прямое и обратное). С целью изучения влияния анизотропии грунта на дебит введем величину $\epsilon = Q/Q_0 - 1$, характеризующую относительный дебит [3].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Орловской области, пректˆ№ 12-01-97522 р_центр_а.

Q — дебит скважины в анизотропной среде, Q_0 — дебит скважины в изотропной среде, определяемый по известной формуле [4]. Как показано в [1], задачу о работе скважины в анизотропном слое грунта можно свести к решению системы интегрального уравнения и интегрального соотношения. Для решения задачи воспользуемся методом дискретных особенностей [5]. Анизотропия грунта может сильно сказываться на дебите Q (может его увеличивать или уменьшать по отношению к Q_0). С увеличением отношения недиагональных к диагональным компонентам тензора (K_{ij}) (увеличение коэффициента α, коэффициент β — фиксирован) влияние анизотропии уменьшается, влияние γ незначительно.

Литература

1. *Пивень В. Ф.* Задача о работе системы скважин в анизотропном пласте грунта // Тр. XIV Междунар. симпозиума «МДОЗМФ».—Харьков–Херсон: Изд-во Харьк. национ. ун-та, 2009.—С. 394–397.
2. *Пивень В. Ф.* Постановка основных граничных задач фильтрации в анизотропной пористой среде // Тр. XIII Междунар. симпозиума «МДОЗМФ».—Харьков–Херсон: Изд-во Харьк. национ. ун-та, 2007.—С. 239–243.
3. *Пивень В. Ф., Лекомцев Д. Г.* Математическое моделирование работы совершенной скважины с прямолинейным контуром питания в анизотропном пласте грунта // Учен. записки Орлов. гос. у-та.—2012.—Т. 47, № 3.—С. 69–74.
4. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод.—М.: Наука, 1977.—С. 644.
5. *Лифанов И. К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.—М.: ТОО Янус, 1995.—С. 520.

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПРАВОНАРУШЕНИЙ НЕСОВЕРШЕННОЛЕТНИХ И ОПТИМИЗАЦИЯ МЕР ПРОФИЛАКТИКИ НА ОСНОВЕ ФАКТОРНОЙ МОДЕЛИ ПРОТИВОПРАВНОГО ПОВЕДЕНИЯ

Н. В. Лукашов

(России, Москва; АУ МВД РФ)

Противоправное поведение несовершеннолетних обусловлено комплексом причин, имеющих как субъективную (личностные особенности), так и объективную (способствующие противоправному поведению внешние условия) природу.

Профилактика противоправного поведения состоит в комплексном воздействии на субъективную и объективную составляющую мотивации несовершеннолетнего.

Предлагается при разработке программ профилактики (противодействия) и прогнозирования состояния противоправного поведения несовершеннолетних использовать инструментарий факторного анализа в соответствии со следующим алгоритмом.

Мотивы противоправного поведения классифицируются по определенным признакам. Затем выделяются факторы, способствующие их возникновению и возможные меры противодействия. Каждый мотив ранжируется по степени влияния на общий показатель — уровень подростковой преступности в регионе. После этого, используя перечень факторов, можно выработать соответствующие меры воздействия на них, разработав теоретически идеальную программу профилактики.

Фактически речь идет о построении региональной модели причин правонарушений несовершеннолетних. Ее основу составляют данные о субъективных и объективных факторах мотивации «м» поведения (противоправного или, напротив — правового) определяемых эмпирически путем экспертной оценки, представленные в виде суммарного коэффициента «Км».

Коэффициент мотивации может быть как положительным, так и отрицательным, в зависимости от направленности воздействия.

Например: объективный фактор — внеклассная занятость повышает общий коэффициент мотивации к правовому поведению на определенную величину, а ее отсутствие не повышает общий коэффициент мотивации к правовому поведению. Субъективный фактор — безнаказанность / чувство неотвратимости наказания может принимать как отрицательное, так и положительное значение.

Суммарный коэффициент мотивации «Км» также может принимать как отрицательное значение, что соответствует состоянию несовершеннолетнего, при котором он, при прочих равных условиях при наличии альтернативы выберет противоправный вариант поведения, так и положительное, что соответствует склонности к правовому поведению. Значение «Км»$= 0$ обозначает индифферентного в отношении мотивации противоправности своего поведения несовершеннолетнего.

Для нормирования «Км» примем, что при «Км»$= -100$, несовершеннолетний совершает в среднем одно преступление в год. При среднестатистическом «Км»$= -1$, вероятность совершения преступления составляет 1 в 100 лет, или 1 преступление в год на 100 несовершеннолетних. «Км»$= -0{,}1$ соответствует уровню преступности 100 на 100 тыс. населения.

Таким образом, усилия по профилактике преступности должны быть направлены на повышение среднестатистического Км. Всех несовершеннолетних предлагается разделить по группам профилактического воздействия, при этом коэффициент «Км» рассчитывается в среднем для группы. Например, для школьников старших классов (по каждой школе), учащихся (по каждому учебному заведению), беспризорных и т. д. Среднестатистический «Км» по региону в целом высчитывается как сумма среднего «Км» каждой группы профилактического воздействия, умноженного на отношение численности группы к общей численности несовершеннолетних в регионе (районе).

Средневзвешенный «Км» по району будет высчитываться как сумма «Км» групп профилактического воздействия пропорционально численности последних. Анализ соответствующих значений позволит выявить, какая группа несовершеннолетних вносит наибольший вклад в абсолютный уровень преступности (с учетом количества в группе).

Несмотря на то, что данное представление упрощено и не учитывает ряда факторов, особенно синергетического характера взаимного влияния, однако позволяет производить соответствующий анализ в первом приближении.

На основе полученных данных можно определить эффективность той или иной профилактической меры конкретного фактора воздействия «Фп» в отношении конкретных групп несовершеннолетних, а также, с учетом численности каждой группы, определить влияние каждой меры профилактики на общий уровень преступности по региону (району).

Теоретически можно произвести дальнейшую оптимизацию затрат известными математическими методами при наличии данных по стоимости и ресурсоемкости конкретных «Фп». Однако реализация этого на практике в массовом порядке затруднительно, по крайней мере, на этапе освоения методики.

Представляется, что вышеприведенных данных будет достаточно для экспертного анализа и принятия обоснованных решений на уровне региональных комиссий по делам несовершеннолетних.

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТЬЮРИНГА И АСИМПТОТИКА ВТОРИЧНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ШНАКЕНБЕРГА

С. А. Лысенко

(Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ)

В настоящей работе рассматривается система Шнакенберга, которая является одной из фундаментальных систем реакции-диффузии с кубической нелинейностью:

$$u_t = \gamma f(u,v) + u_{xx} = \gamma(a - u + u^2 v) + u_{xx},$$
$$v_t = \gamma g(u,v) + dv_{xx} = \gamma(b - u^2 v) + dv_{xx}.$$

В этой системе неизвестные $u = u(x,t)$ и $v = v(x,t)$ представляют собой концентрации двух биохимических веществ в точке x в момент времени $t > 0$, которые являются активатором и субстратом. Параметр d — положительный коэффициент диффузии, γ — положительная постоянная, характеризующая относительную силу влияния слагаемых реакции, a и b — положительные параметры реакции.

Для неустойчивости стационарного состояния по Тьюрингу необходимы устойчивость по отношению к пространственно-однородным возмущениям (в отсутствие диффузии) и неустойчивость по отношению к некоторым пространственно-неоднородным возмущениям (при наличии диффузии).

Известно, что область неустойчивости Тьюринга системы Шнакенберга задается четырьмя условиями, которые должны выполняться одновременно. Два из них соответствуют условиям устойчивости в бездиффузионном приближении, а остальные соответствуют неустойчивости равновесия в случае наличия диффузии. При этом необходимые условия не являются достаточными, а достаточные условия зависят от рассматриваемой области.

Целью настоящей работы является нахождение достаточных условий неустойчивости Тьюринга в случае, когда пространственная переменная $x \in [0;1]$, и на концах отрезка заданы краевые условия Неймана. Найдено критическое значение параметра диффузии, при котором возникает неустойчивость Тьюринга.

Известно, что при этом критическом значении происходит монотонная потеря устойчивости равновесия системы. Методом Ляпунова — Шмидта найдены первые члены разложения по малому параметру надкритичности вторичных стационарных решений системы.

В работе выполнена визуализация области неустойчивости Тьюринга и проведены численные эксперименты для нахождения критических волновых чисел.

Литература

1. *Murray J. D.* Mathematical biology II: Spatial Models and Biomedical Applications.—Berlin, Heidelberg: Springer–Verlag, 1993.—P. 71–98.
2. *Kuttler C.* Reaction-diffusion equations with applications // Sommersemester.—2011.—P. 87–101
3. *Ward M. J., Wei J.* The existence and stability of assimmetric spike patterns for the Schnakenberg model // Stud. Appl. Math.—2002.—P. 229–264.
4. *Guo Y., Hwang H. J.* Pattern formation (II): the Turing instability // Proc. Amer. Math. Soc.—2007.—P. 2855–2866.
5. *Marquez-Lago T. T., Padilla P.* A selection criterion for patterns in reaction-diffusion systems // Theor. Biol. Med. Model.—2014.—P. 1–17.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ В РУСЛОВОМ ПОТОКЕ НА ОСНОВЕ РЕДУЦИРОВАННОЙ 3D МОДЕЛИ

К. А. Надолин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
И. В. Жиляев (Россия, Ростов-на-Дону; ЮНЦ РАН)

В докладе представлены новые результаты аналитического и численного исследования одной из предложенных в [1] редуцированных математических моделей, а именно, базовой модели мелкого протяженного потока. Учет турбулентности течения осуществляется полуэмпирически в рамках гипотезы Буссинеска. Верификация модели проводится путем сравнения данных прямого численного моделирования на основе полных уравнений гидродинамики вязкой жидкости и результатов, полученных на основе редуцированной модели. Вычислительные эксперименты проводились с использованием конечно-элементного комплекса COMSOL Multiphysics (Femlab) [2].

Для расчетов гидрологических характеристик водотоков применяются математические модели разных типов, среди которых наиболее точными являются трехмерные модели, основанные на полных уравнениях гидродинамики турбулентных течений. Однако на практике получить высокую точность моделирования, которую могут обеспечить такие 3D модели, не удается, поскольку данные реальных гидрологических измерений не имеют требуемой точности значений гидрофизических параметров, а также информации о начальных и граничных условиях для трехмерных уравнений в частных производных. Кроме того, сложность и трудоемкость вычислительных экспериментов на основе полных 3D моделей усугубляется геометрией расчетной области, сильно вытянутой в продольном направлении. Вышесказанное объясняет интерес к 2D и редуцированным 3D моделям русловых потоков, сложность которых адекватна точности имеющихся гидрологических данных.

В основу предлагаемого в работе [1] подхода к выводу модельных уравнений положены следующие соображения.

Во-первых, русловые потоки характеризуются относительно малой глубиной течения по сравнению с его шириной, а также значительной протяженностью. С одной стороны, их нельзя (или не хотелось бы) рассматривать как одномерные течения, но не стоит считать и вполне трехмерными объектами. Т. е. в основу упрощения модели и понижения ее размерности могут быть положены геометрические параметры области течения. Отношение между характерной глубиной и характерной шириной речного русла колеблется в пределах от $0,1$ до $0,005$, что может быть основой применения методов малого параметра.

Во-вторых, естественные водотоки всегда являются турбулентными, поэтому любая, даже самая упрощенная модель должна учитывать турбулентность течения. Однако из-за недостаточности экспериментальных данных можно ограничиться простейшими моделями турбулентности [3]. При этом необходимо иметь возможность калибровки модели по имеющимся данным наблюдений.

И наконец, предлагаемые упрощенные модели должны правильно описывать простые частные случаи, решения для которых известны и не вызывают сомнений (например, ламинарное течение).

Отметим, что в отличие от распространенных осредненных моделей, предлагаемые в [1] модели учитывают пространственную структуру течения, что позволяет исследовать влияние формы дна и береговой линии русла, а также некоторых внешних факторов (например, воздействие ветра) на особенности течения в русловом потоке.

Результаты проведенных вычислительных экспериментов позволяют утверждать, что используемая редуцированная модель мелкого протяженного слабо искривленного руслового потока вполне адекватно описывает его гидродинамику и может применяться для моделирования природных водотоков.

Литература

1. *Надолин К. А.* Об одном подходе к моделированию пассивного массопереноса в русловых потоках // Мат. моделирование.—2009.—Т. 21, № 2.—С. 14–28.
2. *Pryor R. W.* Multiphysics Modeling Using COMSOLв: A First Principle Approach.—MA: Jones & Bartlett Publ., 2011.—871 p.
3. *Роди В.* Модели турбулентности окружающей среды // Методы расчета турбулентных течений.—М.: Мир, 1984.—С. 227–322.

О ПОСТАНОВКАХ И КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ЗАДАЧ С ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ КОНТАКТНЫМИ ГРАНИЦАМИ

А. В. Наседкин

(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Пусть $\mathbf{x}$ — вектор пространственных декартовых координат; t — время; $\Omega = \Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)}$ — объем, включающий два отдельных тела $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$; Γ — его граница; $\mathbf{n}$ — вектор внешней единичной нормали к Γ; $\varphi(\mathbf{x}, t)$ — функция электрического потенциала; $T(\mathbf{x}, t)$ — функция температуры; T_0 — температура естественного состояния; $\theta = T - T_0$ — функция прироста температуры.

Примем следующую систему дифференциальных уравнений, связывающих электрические и температурные поля:

$$\nabla \cdot (\mathbf{j} + \dot{\mathbf{D}}) = 0, \quad \mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi, \tag{1}$$

$$\rho c \dot{\theta} + \nabla \cdot \mathbf{q} = Q, \tag{2}$$

$$\mathbf{j} = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{E} - \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla\theta), \quad \mathbf{q} = \boldsymbol{\Pi} \cdot \mathbf{j} - \mathbf{k} \cdot \nabla\theta, \quad \boldsymbol{\Pi} = (\theta + T_0)\boldsymbol{\alpha}, \tag{3}$$

где используются общепринятые обозначения [1, 3] и следующие материальные модули: $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор коэффициентов диэлектрических проницаемостей, ρ — плотность; c — удельная теплоемкость; Q — объемная плотность источников тепла, $\boldsymbol{\alpha}$ — тензор коэффициентов Зеебека; $\boldsymbol{\Pi}$ — тензор коэффициентов Пельтье; $\mathbf{k}$ — тензор коэффициентов теплопроводности.

К системе (1)–(3) присовокупим стандартные краевые электрические и тепловые граничные условия, а также тепловые (термоэлектрические) и электрические контактные краевые условия [2–4] на контактных границах $\Gamma_c^{(1)}$ и $\Gamma_c^{(2)}$ объемов $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$, соответственно. Контактные граничные условия описываются уравнениями

$$\mathbf{n}^{(l)} \cdot (\mathbf{j}^{(l)} + \dot{\mathbf{D}}^{(l)}) = -j_{cel}^{(lm)}, \quad \mathbf{n}^{(l)} \cdot \mathbf{q}^{(l)} = -q_{cth}^{(lm)} - g^{(l)} q_{cel}^{(lm)}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_c^{(l)}, \tag{4}$$

где $l, m = 1, 2$, причем, если $l = 1$, то $m = 2$, и наоборот, $j_{cel}^{(lm)} = \eta_{cel}(\varphi^{(m)} - \varphi^{(l)})$ — плотность контактного электрического тока в направлении границы $\Gamma_c^{(l)}$; $q_{cth}^{(lm)} = \eta_{cth}(\theta^{(m)} - \theta^{(l)})$ — поток тепла от границы $\Gamma_c^{(m)}$ к $\Gamma_c^{(l)}$, обусловленный тепловыми эффектами; $q_{cel}^{(lm)} = k_{el} j_{cel}^{(lm)}(\varphi^{(m)} - \varphi^{(l)})$ — поток тепла от границы $\Gamma_c^{(m)}$ к $\Gamma_c^{(l)}$, вызванный диссипацией энергии при прохождении тока; $g^{(1)} = f$, $g^{(2)} = (1 - f)$, f — множитель, определяющий распределение потока тепла при прохождении тока между границами $\Gamma_c^{(1)}$ и $\Gamma_c^{(2)}$ ($0 \leqslant f \leqslant 1$, и обычно $f = 1/2$); η_{cel} — контактная электрическая проводимость; η_{cth} — контактная теплопроводность; k_{el} — множитель, определяющий долю преобразования электрической энергии в джоулево тепло при контакте ($0 < k_{el} \leqslant 1$).

В модели (1)–(4) связанность между электрическими и тепловыми полями определяется тензором коэффициентов Зеебека $\boldsymbol{\alpha}$, множителем k_{el} и контактной электрической проводимостью η_{cel}. Также связанность возникает, если рассматривать материальные модули, как функции температуры или потенциала ($\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\theta)$ и т. п.), и при учете в объемных источниках тепла Q джоулева тепла по закону Джоуля — Ленца $Q_{vel} = k_{ve}\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$, где k_{ve} — множитель, определяющий эффективность преобразования электрической энергии в тепло.

Далее в докладе приводятся слабые постановки связанных термоэлектрических задач (1)–(4) с контактными граничными условиями, их конечно-элементные аппроксимации и системы уравнений метода конечных элементов (МКЭ) относительно узловых электрических потенциалов $\mathbf{\Phi}$ и температур $\mathbf{T}$ [3]:

$$\mathbf{C}_{\varphi\varphi} \cdot \dot{\mathbf{\Phi}} + \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \cdot \mathbf{\Phi} + \mathbf{K}_{\varphi\theta} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{F}_{\varphi},$$

$$\mathbf{C}_{\theta\theta} \cdot \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{K}_{\theta\theta} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{F}_{\theta} + \mathbf{F}_{n\theta}(\mathbf{T}, \mathbf{\Phi}).$$

Для анализа специфики условий (4) рассмотрены модельные задачи, имеющие аналитические решения, и проведено сравнение этих решений с данными вычислительных экспериментов по МКЭ.

Литература

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред.—М.: Наука, 1982.—624 с.
2. *Фраас А., Оцисик М.* Расчет и конструирование теплообменников.—М.: Атомиздат, 1971.—328 с.
3. ANSYS Rel. 11.0. Theory Reference for ANSYS and ANSYS Workbench.—Canonsburg: SAS IP Inc., 2007.—1110 p.
4. *Liu T. J. C.* Finite element modeling of melting crack tip under thermo-electric Joule heating // Engineering Fracture Mechanics.—2011.—Vol. 78.—P. 666–684.

АДАПТАЦИЯ ГЕОМЕТРИИ ОШИПОВАННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ДЛЯ СОЗДАНИЯ РАСЧЕТНОЙ СЕТКИ

М. Н. Никитин

(Россия, Самара; СамГУ)

Введение

Повсеместное измельчение расчетной сетки не эффективно и затруднено для ряда поверхностей второго порядка. При этом конические поверхности широко используются в технике в виде массивов однотипных объектов (ошипованные поверхности теплообмена). В таких случаях эффективна адаптация геометрии.

Простое усечение конических поверхностей (шипов) без компенсации позволяет исключить нулевые симплексы, но приводит к уменьшению площадей боковых поверхностей шипов S_1 и их объемов V, поэтому данный метод адаптации не рассматривается.

Компенсация площади боковой поверхности и объема при усечении шипов может быть реализована за счет изменения их конусности $C = \frac{2R}{H}$ (рис. 1).

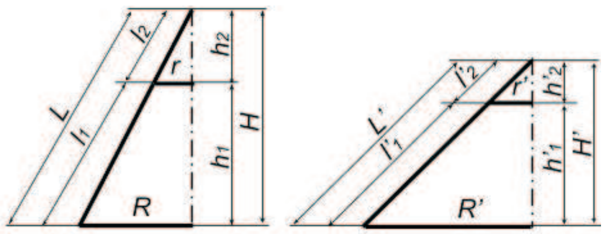

Рис. 1. Усечение с угловой компенсацией.

Угловая компенсация при постоянном радиусе основания

При $R = R'$ произведение объема шипа и его конусности постоянно ($VC = V'C' = \text{const}$), а произведение площади поверхности шипа и его конусности изменяется практически линейно:

$$SC = S'C'\sqrt{\frac{C^2+4}{C'^2+4}}. \tag{1}$$

Для $R = R'$ требуемая высота скомпенсированного конуса H:

$$H' = \frac{Rh_1'}{R-r'} = \frac{R^3 H}{R^3 - r'^3} \Leftarrow V = V', \tag{2}$$

$$H' = R\sqrt{\left(\frac{R\sqrt{R^2+H^2} - r'^2}{R^2 - r'^2}\right)^2 - 1} \Leftarrow S_{\text{бок}} = S'_{\text{бок}}. \tag{3}$$

Для конусностей $1/3 \ldots 2$ при $R/r = 10$ ошибка определения не базового параметра по выражениям (2) и (3) составляет $0,5 \ldots 1,7$ %.

Угловая компенсация при постоянной высоте

Исходя из условия $H = h_1'$, требуемый радиус основания скомпенсированного конуса R' и его высота H':

$$R' = \frac{1}{2}\Big(\sqrt{4R^2 - 3r'^2} - r'\Big), \tag{4}$$

$$R' = f\big(R, H, r'\big) \Leftarrow \sqrt{(R' - r')^2 + H^2}\,\big(R' + r'\big) = R\sqrt{R^2 + H^2} - r'^2, \tag{5}$$

$$H' = \frac{R'H}{R' - r'}. \tag{6}$$

Выражения (3) и (5) применимы для сохранения объема шипа, а выражения (4) и (5) — площади его боковой поверхности. Функциональное выражение (4) решается итерационным методом. Характерна значительная ошибка ($>$ 2 %) при определении не базового параметра.

Выводы

Угловая компенсация при $R = R'$ не решает проблему уменьшения высоты шипов после усечения ($h_1'/H \approx h_1/H' = 1 - r'/R$), поэтому этот вариант не может быть рекомендован для использования в моделях конвективного теплообмена и динамики течений. При $H = h_1'$ строго воспроизводится только один базовый параметр при существенной погрешности в определении другого.

Литература

1. *Никитин М. Н.* Исследование теплообмена с жидкой фазой в кольцевом канале охлаждающего корпуса смесительного теплогенератора // Тепловые процессы в технике.— 2013.—Т. 3, № 9.—С. 404–410.
2. *Щелоков А. И., Краснова Н. П.* Сравнение массовых и теплообменных характеристик конвективных поверхностей водогрейных котлов малой мощности // Вестн. СамГТУ. Сер. Техн. науки.—2013.— № 40.—С. 165–168.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ГАЗОВОЙ ФАЗЫ НА ДИНАМИКУ ВИБРОКИПЯЩЕГО СЛОЯ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМАХ[1]

Н. С. Орлова
(Россия, Владикавказ; ЮМИ)

В данной работе исследуется влияние газового потока на структуру виброкипящего слоя. Были проведены трехмерные расчеты распределения объемной доли частиц в виброкипящем слое с использованием свободно распространяемого пакета для численного моделирования задач гидроаэромеханики OpenFOAM (англ. Open Source Field Operation And Manipulation CFD ToolBox) при поддержке программы «Университетский кластер» с удаленным доступом к консоли на управляющем узле вычислительного кластера JSCC RAS (`https:/\!/unihub.ru/resources/js3c`) Web-лаборатории Unihub (UniHUB.ru). Благодаря открытому исходному коду в OpenFOAM возможно создание собственных решателей. Для описания процесса виброкипения был доработан решатель twoPhaseEulerFoam, который использовался для моделирования динамики кипящего гранулированного слоя [1–3]. В решателе twoPhaseEulerFoam реализована двухжидкостная модель кипящего (ожиженного) слоя на основе континуального подхода (подхода Эйлера), при котором движение слоя рассматривается как движение двух взаимодействующих континуумов, связанных с газом и частицами. Более подробно описание модели представлено в работах [1–4].

Расчеты проводились при различных значениях амплитуды и частоты колебаний, а также разных значениях скорости подачи газового потока. Амплитуда колебаний была равна 3 и 6 мм, частота колебаний варьировалась от 15 до 45 Гц, скорость подачи газа была равна 0,1 м/с, 0,25 м/с и 0,35 м/с. Также были проведены расчеты распределения объемной доли частиц в кипящем гранулированном слое без учета внешнего воздействия вибрациями. Начальная высота слоя (толщина слоя засыпки) была равна 50 мм. Проводилось распараллеливание расчетов на 8 ядрах.

Результаты расчетов показали, что в случаях, когда рассматривается виброкипящий слой, наблюдается более однородное ожижение частиц в отличие от кипящего гранулированного слоя.

С увеличением частоты и амплитуды вибраций волны на поверхности гранулированного слоя более отчетливо визуализируются, особенно при частоте 35–45 Гц. Кроме того уменьшаются размеры областей, в которых концентрация частиц максимальна, и немного уменьшается максимальное значение объемной доли частиц в слое. Это означает, что площадь поверхности контакта фаз (твердых частиц и газа) увеличивается.

[1]Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований по стратегическим направлениям развития науки Президиума РАН № 1 «Фундаментальные проблемы математического моделирования».

Следует отметить, что с увеличением скорости подачи газа растет количество газовых пузырей внутри слоя частиц. За счет этого увеличивается степень расширения слоя. При значениях скорости газового потока больше 0,5 м/с наблюдаются газовые каналы внутри слоя (для случая, когда начальная высота слоя равна 50 мм). С увеличением амплитуды и частоты колебаний газовые каналы уменьшаются, а в некоторых случаях исчезают совсем (при высоких значениях частоты колебаний).

Автор выражают глубокую благодарность сотрудникам Института системного программирования РАН, предоставившим вычислительные ресурсы web-лаборатории UniHUB.

Литература

1. *Rusche H.* Computational Fluid Dynamics of Dispersed Two-Phase Flows at High Phase Fractions.—London: Imperial College, 2002.—343 p.—(Ph. D. Thesis of Imperial College).
2. *B. van Wachem.* Derivation, Implementation, and Validation of Computer Simulation Models for Gas-Solid Fluidized Beds: Dis. ... Ph. D.—Netherlands: Delft University of Technology, 2000.—222 p.
3. *Johnson P. C., Jackson R.* Frictional-Collisional Constitutive Relations for Granular Materials with Application to Plane Shearing // J. Fluid Mechanics.—1987.—Vol. 176.—P. 67–93.
4. *Орлова Н. С., Качалкина Я. Н.* Исследование режимов виброкипящего гранулированного слоя с использованием пакета OpenFOAM // Тр. Ин-та систем. прогр. РАН.—2014.—№ 6.—С. 143–154.

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМНОЙ ДИНАМИКИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ СОЦИАЛЬНЫХ КОНФЛИКТОВ

А. Ф. Оськин
(Беларусь, Полоцк; ПГУ)

Системная динамика — техника компьютерного моделирования, широко применяемая для анализа динамических процессов. Основателем системной динамики является профессор Слоуновской школы менеджмента при Массачусетском технологическом институте Джей Форрестер. Математическим аппаратом системной динамики являются системы нелинейных дифференциальных уравнений. Моделируемый процесс изображается в виде диаграмм, состоящих из таких элементов как накопители (или уровни, в терминологии системной динамики), и потоки. Элементы связываются друг с другом с помощью петель положительной и отрицательной обратной связи.

Существует целый ряд специализированных программных средств, позволяющих решать задачи системной динамики. Разработан язык программирования DYNAMO, реализованный в ряде специализированных пакетов. В нашем исследовании мы использовали пакет iThink, один из наиболее популярных пакетов для решения задач системной динамики.

С помощью системной динамики был решен ряд важных и интересных задач. Так, например, под руководством Джея Форрестера в Массачусетском технологическом институте была создана и исследована динамическая модель национальной экономики США. При разработке и исследовании этой модели выявился целый ряд особенностей, характерных для системной динамики как метода моделирования в целом. Широкое использование нелинейности обеспечивает устойчивость модели по отношению к вариации параметров. По мнению Форрестера, это характерно и для социальных систем. Именно поэтому системная динамика является идеальным инструментом для моделирования социальных процессов.

Перейдем к рассмотрению моделей социальных конфликтов. Наиболее известной из этой группы является модель гонки вооружений, предложенная Л. Ричардсоном. В соответствии с разработанной им теорией, взаимодействие двух враждебных стран может быть описано с помощью следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = ay - mx + r,$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = by - nx + s.$$

Здесь

x, y — расходы на вооружения первой и второй стран соответственно;

a, b, m, n — положительные константы;

r, s — коэффициенты, которые Ричардсон называет коэффициентами державных претензий. Если $r > 0$ и $s > 0$, то они характеризуют уровень враждебности и взаимных претензий. Если же $r < 0$ и $r < 0$, то их можно назвать коэффициентами доброй воли.

В зависимости от соотношения между коэффициентами a, b, m, n и знаков r и s возможны различные сценария развития ситуации.

Для построения нашей модели мы решили использовать активно применяемую в биологии модель взаимодействия популяций, известную как модель Лотки — Вольтерра. Несколько модернизировав эту модель, мы получили следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = a_{01}N_1 + a_{12}N_1N_2 + a_{11}N_1^2,$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = a_{02}N_2 + a_{21}N_1N_2 + a_{22}N_2^2,$$

$$N_1 + N_2 + N_3 = 1.$$

Здесь

N_1 — часть жителей моделируемой страны, поддерживающая существующую власть.

N_2 — часть жителей моделируемой страны, поддерживающая оппозицию.

N_3 — часть жителей моделируемой страны, не участвующих в политической жизни.

a_{01} — коэффициент, учитывающий изменения численности населения, поддерживающего власть. Он может быть положительным, если решения принимаемые властью удовлетворяют жителей или отрицательным в противном случае.

a_{02} — коэффициент, учитывающий изменения численности населения, поддерживающего оппозицию. Он также может быть положительным или отрицательным.

a_{12}, a_{21} — коэффициенты, учитывающие взаимодействие власти и оппозиции.

a_{11}, a_{22} — коэффициенты, учитывающие конкуренцию в среде сторонников власти и сторонников оппозиции соответственно. В наиболее общем случае описанная система нелинейна. Все коэффициенты уравнений зависят от переменных N_1 и N_2.

Исследование системы выполнялось на модели, построенной по данным дифференциальным уравнениям в среде моделирования iThink.

В докладе рассматриваются различные сценарии развития взаимодействия между властью и оппозицией, в зависимости от знаков и величин коэффициентов.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОБУЧАЕМОГО В СИСТЕМЕ СМЕШАННОГО ОБУЧЕНИЯ

Д. А. Оськин (Беларусь, Полоцк; ПГУ),
А. Ф. Оськин (Беларусь, Полоцк; ПГУ)

По определению, под смешанным обучением понимается совместное использование классических методик обучения и современных дистанционных технологий. Главным достоинством классической методики является прямой, непосредственный контакт обучаемого и обучающегося, оказывающий большое эмоциональное воздействие на обучаемого и способствующий лучшему усвоению учебного материала. Применение технологий дистанционного обучения позволяет задать для каждого обучающегося собственную образовательную траекторию, индивидуализировать процесс обучения, сделать его асинхронным. Каждый обучающийся может осваивать учебный материал в любое удобное для него время, в привычной обстановке, с оптимальной скоростью. Сочетание этих двух подходов и образует систему технологий, имеющих общее название «Смешанное обучение» (Blendet Learning). Технологии смешанного обучения уже доказали свою высокую эффективность. По данным The Open Educational Consortium успеваемость в американских школах, использующих технологии смешанного обучения, на 27 процентов выше, чем в среднем по стране.

Как показал зарубежный опыт, из всех многочисленных моделей смешанного обучения, наибольшее распространение получила модель, называющаяся «перевернутый класс» (Flipped Classroom). Остановимся ней подробнее.

Термин «перевернутый класс» можно отнести к широкому спектру технологий смешанного обучения, при использовании которых студенты, до очной встречи с преподавателем, получают удаленный доступ к образовательному контенту по теме, а во время очного занятия закрепляют изученный контент и выполняют практические задания по теме. При этом наибольшее распространение получил подход, при котором студенты просматривают дома серию коротких видеолекций по теме предстоящего занятия, а в аудитории совершенствуют свои знания, выполняя практические задания.

Модель «перевернутый класс» органично вписывается в любую систему информационной поддержки обучения. При этом, как уже отмечалось выше, появляется возможность индивидуализации обучения, реализуется подход, при котором каждый обучающийся осваивает новые знания по изучаемой дисциплине, двигаясь по своей образовательной траектории. При построении такой системы важно знать как именно происходит освоение знаний, т. е. необходима модель обучения. Разрабатывая нашу модель, мы опирались на теорию освоения знаний, построенную выдающимся российским педагогом В. П. Беспалько. В книге «Теория учебника» он показал, что этот процесс может быть разбит на четыре уровня — репродуктивное узнавание, репродуктивное алгоритмическое действие, продуктивное эвристическое действие и продуктивное творческое действие. Мы считаем, что описать процесс на каждом из уровней можно с помощью следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = A - BS. \tag{1}$$

Здесь

S — объем накапливаемых знаний по дисциплине;

A, B — коэффициенты, в общем случае зависящие от S, характеризующие индивидуальные особенности обучаемого.

В докладе рассматривается модель, построенная в среде моделирования iThink, состоящая из четырех дифференциальных уравнений вида (1). Анализируются различные сценарии обучения.

ПРИМЕНЕНИЕ ПАКЕТОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ СИГНАТУР ОПЕРАТОРОВ КРИВИЗНЫ ЛЕВОИНВАРИАНТНЫХ ЛОРЕНЦЕВЫХ МЕТРИК ТРЕХМЕРНЫХ ГРУПП ЛИ[1]

С. В. Пастухова (Россия, Барнаул; АлтГУ),
О. П. Хромова (Россия, Барнаул; АлтГУ)

В настоящее время все чаще при решении научно-исследовательских задач используются пакеты прикладных программ. Это связано с тем, что универсальные математические системы позволяют проводить как численные, так и символьные вычисления. В геометрии и анализе существует множество примеров, подтверждающих эффективность привлечения пакетов аналитических вычислений при доказательстве теорем из [1, 2].

В данной работе с помощью компьютерных моделей, реализованных в среде пакета аналитических вычислений Maple, определены возможные сигнатуры операторов кривизны Риччи, одномерной кривизны, секционной кривизны трехмерных групп Ли с левоинвариантными лоренцевыми метриками.

Литература

1. *Балащенко В. В., Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В.* Однородные пространства: теория и приложения.—Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2008.—280 с.
2. *Хромова О. П., Родионов Е. Д., Славский В. В.* О компонентах разложения тензора кривизны на группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой.—Saarbruken: LAP LAMBERT Academic Publ. GmbH & Co. KG, 2012.—76 с.

[1]Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ, грант НШ-2263.2014.1, Правительства РФ, госконтракт № 14.B25.31.0029, Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет», код проекта: 1148.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДОРОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ СРЕДСТВАМИ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

А. В. Подорога (Россия, Москва; МГУ)

Следующий вопрос представляет интерес при математическом описании транспортных потоков. Рассмотрим задачу Коши для квазилинейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial Q(\rho)}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ \rho(x,0) = \rho_0(x). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\rho = \rho(x,t)$ — плотность транспортного потока в точке x в момент времени t. Функциональную зависимость $Q(\rho)$ возьмем в соответствии с моделью Нагеля — Шрекенберга (см. [1, 2]):

$$Q(\rho) = \begin{cases} k_1 \rho, & 0 \leqslant \rho \leqslant \rho^*, \\ k_2\left(\rho_{\max} - \rho\right), & \rho^* \leqslant \rho \leqslant \rho_{\max}, \end{cases} \tag{2}$$

где

$$k_1 = v_{\max}, \qquad k_2 = \frac{v_{\max}\,\rho^*}{\rho_{\max} - \rho^*}. \tag{3}$$

При этом $v_{\max}$ — максимальная разрешенная скорость транспортного потока, $\rho_{\max}$ — максимальная допустимая плотность потока, а ρ^* — критическая плотность, при которой происходит переход от свободного движения к затрудненному. На практике численные значения $v_{\max}$, $\rho_{\max}$ известны с высокой точностью, а нахождение истинного значения ρ^* представляет затруднения.

Для восстановления значения $\rho^* \in (0, \rho_{\max})$ зададим дополнительное переопределение

$$\int\limits_0^T Q\left(\rho(x_0,t)\right)\,dt = a \tag{4}$$

с фиксированными $x_0 \in \mathbb{R}$, $T > 0$, $a > 0$. Условие (4) выражает общее число автомобилей, прошедших через точку x_0 за время $0 \leqslant t \leqslant T$. Справедлив следующий результат.

Теорема. *Пусть функция $Q(\rho)$ имеет вид* (2) *с коэффициентами* (3), *причем величины $\rho_{\max} > 0$, $v_{\max} > 0$ заданы, а точное значение $\rho^* \in (0, \rho_{\max})$ неизвестно. Пусть начальная функция $\rho_0(x)$ в задаче Коши* (1) *удовлетворяет оценке*

$$0 < C_1 < \rho_0(x) < C_2 < \rho_{\max}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

где C_1, C_2 — некоторые константы, причем априори известно, что $C_1 > \rho^*$. Пусть также $0 < a < C_1\,T\,v_{\max}\,(\rho_{\max} - C_2)/(\rho_{\max} - C_1)$. Тогда величина ρ^* находится из *соотношений* (1)–(4) *и притом однозначно. В частном случае постоянной плотности* $\rho_0(x) \equiv \rho_1$, *удовлетворяющей априорной оценке* $\rho^* < \rho_1 < \rho_{\max}$, *получаем точное значение*

$$\rho^* = \frac{a\,\rho_{\max}}{a + T\,v_{\max}(\rho_{\max} - \rho_1)}. \qquad (6)$$

В докладе будет рассказано о подтверждении полученных соотношений средствами компьютерного моделирования. В серии экспериментов на программе “Cars”, разработанной на кафедре математической физики факультета ВМК МГУ (см. [3, 4]), получено значение ρ^*, хорошо согласованное с формулой (6). Так при настройке программы с параметрами $v_{\max} = 30$ м/с, $\rho_{\max} = 0,125$ авто/м, возникает значение $\rho^* \approx 0,012$ авто/м. Это значение устанавливается как из расчетов по формуле (6), так и из других независимых соображений, связанных с моделированием идеального транспортного потока на кольцевой автодороге.

Литература

1. *Гасников А. В. и др.* Введение в математическое моделирование транспортных потоков: Учеб. пособие / Под ред. А. В. Гасникова.—М.: МЦНМО, 2013.—427 с.
2. *Nagel K., Schreckenberg M.* A cellular automaton model for freeway traffic // J. de Physique. I. France.—1992.—Vol. 2, № 12.—P. 2221–2229.
3. *Подорога А. В.* Имитационные компьютерные модели в задачах однополосного дорожного движения // Системы компьютерной математики и их приложения.—Смоленск: Изд-во Смолен. гос. ун-та, 2014.—Вып. 15.—С. 42–44.
4. *Подорога А. В.* Моделирование идеального транспортного потока на кольцевой автодороге // Системы компьютерной математики и их приложения.—Смоленск: Изд-во Смолен. гос. ун-та, 2015.—Вып. 16.—С. 35–38.

О МЕХАНИЗМЕ ВОЗНИКНОВЕНИЯ НОЧНЫХ НИЗКОУРОВНЕВЫХ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ

А. А. Радионов

(Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Имеющееся объяснение физических явлений [1], приводящих к появлению ночных низкоуровневых струйных течений (НСТ) противоречит некоторым наблюдательным фактам [2].

В работе развиваются математические модели, положенные в основу предыдущих работ [1], с дополнительным учетом сжимаемости атмосферного воздуха. Получено уравнение, описывающее динамику плоских возмущений плотности при возникновении НСТ.

Аналитический анализ полученных уравнений показывает, что в их решениях возможен экспоненциальный рост плоского возмущения плотности и пропорциональной ему скорости ветра возмущения в стратифицированных слоях атмосферы. Основным параметром обусловливающим этот рост является вторая производная потенциальной температуры инверсии по высоте.

Сравнение полученного теоретически и экспериментально измеренного вертикального профиля скоростей ветра показывает совпадение высот максимума измеренных и вычисленных значений скорости ветра. Вычисленный теоретически вертикальный профиль скорости ветра отличается от наблюдаемого, отличие обуславливается влиянием турбулентного перемешивания.

На основании приведенного анализа показано, что причиной возникновения НСТ является не сила Кориолиса, как предполагалось ранее [1]. Сила Кориолиса лишь вращает с инерциальной частотой возмущения растущие вследствие развития инверсионного слоя. Причиной возникновения НСТ является рост возмущения плотности по вертикальной координате в слоях атмосферы с положительным значением величины второй производной потенциальной температуры инверсии по высоте. В отсутствие силы Кориолиса, например, при выхолаживании близ экваториальных равнинных территорий, в атмосфере над ними возникнет приподнятая инверсия и появится НСТ.

Свойства полученных решений находятся в удовлетворительном качественном согласии с экспериментальными данными о НСТ [2]. В частности, экспериментально отмечается пропорциональная связь скорости ветра в струе НСТ с величиной геострофического ветра; отмечается взаимосвязь высот расположения НСТ и инверсии температуры; увеличение скорости ветра в НСТ с увеличением мощности инверсии; установлено вращение струи НСТ с инерциальной частотой; в зимнее время инверсии температуры могут существовать длительный промежуток времени в несколько суток [2] что объясняет длительность существования зимних НСТ.

Литература

1. *Blackadar A. K.* Boundary layer wind maxima and their significance for the growth of nocturnal inversions // Bull. Amer. Meteorol. Soc.—1957.—Vol. 38.—P. 283–290.
2. *Kallistratova M. A., Kuznetsov D. D., Kuznetsova I. N., Nakhaev M., Chirokova G.* Summertime low-level jet characteristics measured by sodars over rural and urban areas // Meteorol. Z.—2009.—Vol. 18, № 3.—P. 289–295.

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ БЕЗНАПОРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Л. Ю. Сербина
(Россия, Нальчик; ИПМА)

Решение многих прогнозных задач возникновения и развития опасных гидрогеологических процессов основано на применении нелинейных дифференциальных уравнений бенапорной фильтрации, решения которых получают для определенным образом схематизированных природных условий. Важно отметить, что нелинейные математические модели фильтрации, описывая общие закономерности нестационарного движения подземных вод в широком диапазоне изменения параметров природной системы, обладают большой емкостью информации об изучаемых нелиниейных явлениях. При этом общим недостатком, ограничивающих их практическое применение, является отсутствие общей теори разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений. Одно из современных и перспективных напрвлений построения адекватных математических моделей, существенно расширяющим методы математического моделирования количественной эволюции гидродинамических параметров природной системы, связаной с их нелинейной зависимостью от сложного строения пространственно-временной структуры среды протекания и приводящих к возникновению критических состояний, связано с интенсивным использованием теории нагруженных уравнений[1].

В данной работе, продолжая ранее начатые исследования [2], проблемы методов математического моделирования долгосрочного прогнозирования и регулирования уровня грунтовых вод в водонасыщенных средах с фрактальной пространственно-временной структурой, сведены к изучению вопроса однозначной разрешимости краевой нелокальной задачи для нагруженного дифференциального уравнения с частными производными второго порядка параболического типа. Для нелинейной математической модели нестационарного плоскопараллельного бенапорного движения грунтовых вод со слабоизменяющейся поверхностью предложен и реализован алгоритм теоретического поиска необходимых нелокальных краевых условий, поорждаемых методом ее линеаризации.

Литература

1. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их применение.—М.: Наука, 2012.
2. *Сербина Л. И.* Нелокальные математические модели переносав водоносных системах.—М.: Наука, 2007.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ С ПОДВИЖНЫМИ И ПЕРЕМЕННЫМИ ГРАНИЦАМИ

А. М. Столяр
(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

В работе предлагается три метода — асимптотический и два численных — к решению краевых и начально-краевых задач с подвижными и переменными границами. В случае асимптотического интегрирования в качестве малого параметра выбирается величина, характеризующая скорость, с которой изменяется граница области определения задачи. Производится разложение неизвестной функции в ряд Тейлора на подвижной/переменной границе, что приводит решение исходной задачи к решению последовательности начально-краевых задач уже в постоянной области интегрирования. Таким образом, рассмотрены начально-краевые задачи для гиперболического и параболического уравнений с граничными условиями Неймана, Дирихле и Робена и задача Дирихле для эллиптического уравнения (отметим, что задачи Неймана и Робена для эллиптического уравнения также можно исследовать по предлагаемой методике) [1–3]. Кроме того, метод асимптотического интегрирования используется для решения задачи о продольных колебаниях груза на вязкоупругом тросе переменной длины (см. рис. 1):

$$\rho F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{d^2\xi}{dt^2}\right)=EF\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\mu EF\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}-\rho Fg,$$

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2}=-EF\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}+mg,$$

$$\xi(t)=\ell(t)+u(\ell(t),t),\quad u(x,t)\big|_{x=0}=0,\quad u(x,t)\big|_{x=0}=0,$$

$$u(x,t)\big|_{t=0}=\varphi_1(x),\quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\varphi_2(x),$$

$$\ell(t)\big|_{t=0}=\ell_0,\quad \frac{d\ell}{dt}\left[1+\frac{\partial u(\ell,t)}{\partial \ell}\right]=\varepsilon_{\pm}\psi(t).$$

Здесь $u(x,t)$ — продольное смещение троса в подвижной системе координат, связанной с грузом; $\xi(t)$ — расстояние от точки подвеса троса до груза, $\ell(t)$ — длина троса в недеформированном состоянии; $\varepsilon_{\pm}\psi(t)$ — скорость изменения длины троса, $\varepsilon_{\pm}=\varepsilon\succ 0$, когда длина троса увеличивается, $\varepsilon_{\pm}=-\varepsilon\prec 0$, когда длина троса уменьшается, остальные обозначения понятны. Подчеркнем, что достоинством предлагаемого подхода является возможность решения задач и в нелинейной постановке. Для численного интегрирование разрабатываются модификации известных численных методов для решения задач с подвижной границей: следуя идеям И. М. Бермуса, метод Рунге — Кутта мы адаптируем на случай переменной во времени области интегрирования, а также вводим подвижную сетку, позволяющую применять здесь также и метод конечных разностей (см. рис. 2). Проводится сравнение результатов асимптотического и численного интегрирования. В случае отрезка интегрирования постоянной длины проводится исследование сходимости разностного алгоритма.

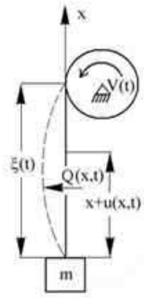

Рис. 1. Модель троса переменной длины с грузом.

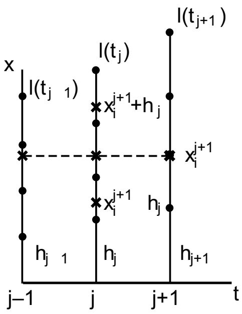

Рис. 2. Подвижная сетка метода конечных разностей.

Литература

1. *Столяр А. М.* О задачах математической физики с подвижными и переменными границами.—Saarbrücken: Lambert Academic Publ., 2013.—60 с.
2. *Stolyar A. M.* Integration of initial boundary value problems with free and moving boundaries // Science and World.—2014.—Vol. 12, № 8.—P. 26–29.
3. *Бермус И. М. и др.* Продольные колебания груза на стальном канате переменной длины // Докл. расширенных заседаний семинара института прикладной математики им. И. Н. Векуа.—Тбилиси, 1989.—Т. 4, № 3.—С. 29–32.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тезисы докладов XII Международной научной конференции (с. Цей, 12–18 июля 2015 г.)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА РАЗЛИЧНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ОГРАНИЧЕННОМ АНИЗОТРОПНОМ СЛОЕ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

Ю. С. Федяев

(Россия, Орел; ОГУ)

Стационарную фильтрацию несжимаемой жидкости в недеформируемом анизотропном однородном слое пористой среды с тензором проницаемости K описывают обобщенный потенциал φ и функцией тока ψ. Они удовлетворяют системе уравнений [1]:

$$K_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad K_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+K_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{1}$$

Здесь x, y — декартовы координаты в плоскости основания слоя, K_{ij}, $i,j=1,2,$ — постоянные компоненты тензора проницаемости.

Область фильтрации D ограничивает контур питания L_1 или непроницаемая граница L_2. На этих границах выполняются условия:

$$\varphi^+(z,t)=\mathrm{const},\quad z\in L_1, \tag{2}$$

$$\psi^+(z,t)=\mathrm{const},\quad z\in L_2. \tag{3}$$

Здесь и далее $z=x+iy$, t — время, символ «+» («−») означает предельное значение функции при подходе к границе со стороны (с противоположной стороны) орта нормали к ней.

Подвижная граница Γ_t между различными жидкостями делит область фильтрации на части D_1 и D_2. В области D_1 движется жидкость вязкости μ_1 и плотности ρ_1, а в области D_2 — жидкость вязкости μ_2 и плотности ρ_2. Полагаем, что при движении одна жидкость полностью замещает другую и на границе раздела жидкостей капиллярные силы пренебрежимо малы. Тогда условия непрерывности давления и расхода жидкости имеют вид

$$\begin{gathered}\mu_1\varphi^+(z,t)-\mu_2\varphi^-(z,t)=(\rho_2-\rho_1)\Pi(z,t),\\ \psi^+(z,t)=\psi^-(z,t),\quad z\in\Gamma_t,\end{gathered} \tag{4}$$

где $\Pi(z,t)$ — потенциал массовой силы.

Положение границы Γ_t на плоскости z в любой момент времени $t>0$ описывается параметрическим уравнением (s — параметр)

$$z=z(t,s)\quad (x=x(t,s),\, y=y(t,s)),\quad z\in\Gamma_t. \tag{5}$$

В начальный момент времени $t=0$ положение границы Γ_t известно:

$$z_0=z(0,s)\quad (x_0=x(0,s),\, y_0=y(0,s)),\quad z\in\Gamma_0. \tag{6}$$

Дифференциальные уравнения движения границы Γ_t имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = v_x(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = v_y(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_t, \tag{7}$$

где v_x, v_y — проекции скорости фильтрации. Первое и второе уравнения системы (1) определяют v_x и v_y соответственно.

Таким образом, задана область фильтрации D, тензор проницаемости K, граница Γ_0. Необходимо найти положение границы Γ_t (5). Решение задачи состоит в интегрировании системы уравнений (1), (7) с учетом граничных условий (2)–(4) и начальных условий (6).

Поставленная задача сводится к решению системы интегрального уравнения и дифференциальных уравнений движения границы Γ_t [2, 3]. Граница области фильтрации учитывается с помощью теорем сопряжения [1]. Построен численный алгоритм решения задачи на основе метода дискретных особенностей.

Исследована эволюция границы раздела жидкостей к эксплуатационной скважине. Получены зависимости времени достижения границей Γ_t скважины от параметров задачи. Изучено влияние анизотропии грунта, границ области фильтрации, различия физических свойств жидкостей на движение границы раздела жидкостей.

Литература

1. *Пивень В. Ф.* Математические модели фильтрации жидкости.—Орел: Изд-во ОГУ, ПФ «Картуш», 2015.—408 с.
2. *Федяев Ю. С.* Математическое моделирование эволюции границы раздела жидкостей различных вязкостей в анизотропном слое пористой среды, ограниченном контуром питания // Ученые записки Орлов. гос. ун-та. Сер. Естеств., техн. и мед. науки.—2013.—№ 3 (53).—С. 95–101.
3. *Федяев Ю. С.* Математическое моделирование эволюции границы раздела жидкостей различных вязкостей в анизотропном слое пористой среды, ограниченном непроницаемой границей // Ученые записки Орлов. гос. ун-та. Сер. Естеств., техн. и мед. науки.—2013.—№ 6 (56).—С. 70–75.

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ДВУХКАСКАДНОЙ ВИБРОИЗОЛЯЦИИ СТИРАЛЬНОЙ МАШИНЫ БАРАБАННОГО ТИПА

Фетисов В. Г. (Россия, Владикавказ; ЮМИ),
Фетисов И. В. (Россия, Москва; ООО «Пневмакс»),
Алехин С. Н. (Россия, Шахты; ИСОиП (филиал) ДГТУ),
Петросов С. П. (Россия, Шахты; ИСОиП (филиал) ДГТУ)

Эффективность функционирования сложных технических систем (в том числе стиральных машин) в основном определяется степенью совершенства проекта системы и качеством управления ее регулируемыми элементами в конкретных условиях эксплуатации. Традиционный подход к созданию регулируемых технических систем состоит в последовательном решении двух рассматриваемых независимо друг от друга задач оптимального проектирования и оптимального управления.

Механические системы, нагруженные случайными возмущениями, имеют широкое применение в технике, например, в амортизаторах систем виброзащиты приборов, машин, конструкций. Решение такого типа нелинейных задач динамики, как правило, связано с большими трудностями. Как известно, получить решение нелинейного уравнения общего вида в аналитической форме (даже для наиболее простого уравнения второго порядка) нельзя, не говоря уже о решении системы нелинейных уравнений движения механических систем, нагруженных детерминированными или случайными силами.

В 1884 г. шведский инженер Лаваль обнаружил, что уравновешенный диск, сидящий на гибком валу, в закритической области частот вращения, т. е. при частотах, больших частоты свободных колебаний ротора, самоцентрируется: его центр масс располагается практически на оси вращения. В результате существенно снижаются неуравновешенные усилия, передаваемые на опоры вала. Этот эффект успешно используется при создании различного рода машин с быстро вращающимися роторами, например, центрифуг стиральных машин. Этот принцип проявляется и в других, в том числе более сложных роторных системах, позволяющих существенно усовершенствовать машины для стирки белья.

Снижение виброактивности при центробежном отжиме белья является в настоящее время одним из приоритетных вопросов, которые приходится решать разработчикам стиральных машин на стадии их проектирования. Актуальность данного вопроса связана с обеспечением надежности, безопасности и экономичности стиральных машин, а также со снижением вредного воздействия вибрации и шума на человека.

К настоящему времени опубликована серия научных работ, посвященных вопросам исследования динамики стиральных машин и снижению их виброактивности, где практически во всех разработках при математическом моделировании колебаний стиральных машин их колебательная система рассматривается как однокаскадная система виброизоляции, представляющая из себя упруго-диссипативную подвеску моечног узла (подвесной части). Корпус машины является абсолютно жесткой неподвижной конструкцией.

Вместе с тем, колебательная система стиральных машин в реальных условиях представляет собой достаточно сложную многокаскадную систему виброизоляции с множеством конструктивных элементов, характеризующихся упругими и диссипативными свойствами.

Таким образом, при выборе рациональных параметров системы виброизоляции не учитывалось влияние на динамику стиральных машин свойств конструктивных элементов и характер их связей, что безусловно снижает достоверность исследований, обоснованность выводов и рекомендаций, направленных на снижение виброактивности машин.

Литература

1. *Блехман И. И.* Вибрационная механика.—М.: Физматлит, 1994.—400 с.
2. *Фетисов И. В.* Решение модельной задачи о случайных колебаниях подвесной части стиральной машины // Фундаментальные и прикладные прблемы техники и технологии.—2012.—№ 4.—С. 84–95.
3. *Фетисов И. В.* Исследование случайных воздействий на вибрационные характеристики стиральных машин барабанного типа при отжиме: Дисс. ... канд. тех. наук.—Шахты, 2011.—204 с.

МОДЕЛЬ СОЦИАЛЬНОЙ НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛИТЫ И ТРУДЯЩИХСЯ

З. Х. Хосаева (Россия, Владикавказ; ВНЦ РАН),
В. Г. Цибулин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

В работе [1] рассмотрена модель взаимодействия между правящей группой и враждебной ей социальной группой претендентов на власть. Показано, что при изменении управляющего параметра возможен переход от состояния системы с одной устойчивой стационарной точкой к состоянию с тремя стационарными точками, одна из которых неустойчива, и обратно. При этом возможен резкий рост уровня враждебности претендентов, т. е. опасность столкновений между сторонниками претендентов и силами охраны порядка.

Аналогичные уравнения получены с использованием подхода, развитого в [2] для оценки изменения напряженности в обществе, состоящем из правящей элиты и трудящихся. Для напряженности элиты P_1 уравнение будет иметь вид

$$\frac{dP_1}{dt} = \gamma_{э1}(P_{э1} - P_1) + c_1 \frac{P_2}{1 - P_2}(P_2 - P_1).$$

Для напряженности трудящихся P_2:

$$\frac{dP_2}{dt} = \gamma_{э2}(P_{э2} - P_2) + c_2 \frac{P_1}{1 - P_1}\big[(P_1 - P_2) + \eta_2 P_2(1 - P_1)\big].$$

$\gamma_{э1}$, $\gamma_{э2}$, c_1, c_2, η_2 — константы для данного общества, $P_{э1}$, $P_{э2}$ — управляющие параметры.

Для определения положения стационарных точек этой системы уравнений получаем алгебраическое уравнение четвертого порядка. С учетом ограничений на значения искомых функций $P_i \in [0, 1]$ в зависимости от значений управляющих параметров и констант возможно наличие одной или двух стационарных точек или их отсутствие. Наиболее интересен случай, когда при небольших значениях управляющих параметров имеется одна устойчивая стационарная точка, при увеличении значений управляющих параметров возникает вторая, неустойчивая стационарная точка, а при дальнейшем увеличении этих значений ни одной стационарной точки в той части фазового пространства, которая соответствует реальности, нет. Исчезновение стационарных точек соответствует быстрому (но не мгновенному) росту напряженности, т. е. революционной ситуации. При наличии двух стационарных точек, одна из которых неустойчива, достаточно большие случайные флуктуации напряженности, возникающие при проведении масштабных протестных акций или под действием интенсивного дестабилизирующего информационного воздействия, могут перевести систему в состояние, когда дальнейший рост напряженности будет самопроизвольным, т. е. также привести к революционной ситуации.

Литература

1. *Karmeshu Mr., Jain V. P., Mahajan A. K.* A dynamic model of domestic political conflict process // J. Conflict Resolut.—1990.—Vol. 34, № 2.—P. 252–269.
2. *Bosse E., Hoogendoorn M., Klein M.C.A., Treur J., van der Wal C.N., van Wissen A.* Modelling collective decision making in groups and crowds: Integrating social contagion and interacting emotions, beliefs and intentions // Auton. Agent Multi-Agent Syst.—2013.—Vol. 27.—P. 52–74.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА В ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВКАХ

А. А. Цынаева
(Росиия, Самара; СГАСУ)

Математическое моделирование теплообмена требуется при проектировании перспективных энергетических установок и аппаратов [1–3] с целью уменьшения сроков их выпуска. При этом использование методов численного исследования позволяет оптимизировать конструктивные параметры энергетических установок. Программное обеспечение на базе открытых кодов позволяет исследователям иметь возможность корректирования параметров моделей, применяемых в процессе исследования [4].

Работа посвящена численному анализу эффективности применения гантель образных лунок для интенсификации теплообмена на поверхности. Моделирование выполнено с помощью свободного программного продукта Code Saturne [5]. Для моделирования турбулентного течения, обтекающего поверхность с гантель образными лунками, Code Saturne использует уравнения, которые при $(\underline{u} = \underline{\bar{u}} + u')$ имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} + \mathrm{div}(\rho\underline{\bar{u}}) = \Gamma, \\ \rho\,\dfrac{d\underline{\bar{u}}}{dt} + \underline{\underline{\nabla}\bar{u}} \cdot (\rho\underline{\bar{u}}) = -\underline{\nabla}\bar{P} + \underline{\mathrm{div}}\Big(\mu\Big[\underline{\underline{\nabla}\bar{u}} + \underline{\underline{\nabla}\bar{u}}^T - \dfrac{2}{3}\,\mathrm{tr}\big(\underline{\underline{\nabla}\bar{u}}\big)\underline{\underline{\mathrm{Id}}}\Big]\Big) + \\ + \rho\underline{g} - \underline{\mathrm{div}}(\rho\underline{\underline{R}}) + \underline{ST_u} - \underline{\underline{K}}\,\underline{\bar{u}} + \Gamma\big(\underline{\bar{u}}^{in} + \underline{\bar{u}}\big). \end{cases} \tag{1}$$

Замыкание уравнений осуществленно $k{-}\omega\; SST$ моделью турбулентности, которая предполагает запись тензора напряжения Рейнольдса: $\underline{\underline{R}} = \overline{u' \oplus u'}$. Предполагается, что со скоростью деформации тензора $\underline{\underline{\bar{S}}} \equiv \frac{1}{2}\big(\underline{\underline{\nabla}\bar{u}} + \underline{\underline{\nabla}\bar{u}}^T\big)$ имеем $\rho\underline{\underline{R}} = \frac{2}{3}\rho k\underline{\underline{I}} - 2\mu_T\underline{\underline{\bar{S}}}^D$, здесь кинетическая энергия турбулентных пульсаций определяется [6]:

$$k \equiv \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\big(\underline{\underline{R}}\big). \tag{2}$$

Математическая модель включает уравнение неразрывности, уравнение энергии потока, уравнения Навье — Стокса, модели турбулентности. Уравнение энергии записывается в следующем виде:

$$\rho\frac{d\underline{e}}{dt} = -div\big(q''\big) + q''' + Pdiv(\underline{u}) + \mu S^2. \tag{3}$$

Анализ достоверности полученных результатов выполнялся при сравнении результатов расчета для неглубокой сферической лунки и результатов эксперимента [7].

Моделирование выполнялось для гладкой поверхности, для поверхности с неглубокими сферическими лунками $(H/D = 0,14)$, для поверхности с гантель образными интенсификаторами сложной формы той же глубины. Полученные результаты моделирования для полусферических лунок показали известное распределение коэффициентов теплоотдачи в лунке, качественно сопоставимое с результатами исследований [7].

Результаты моделирования показали, что для поверхности с гантель-образными лунками осредненный коэффициент теплоотдачи выше, чем для гладкой пластины или для пластины с неглубокими сферическими лунками. Однако наблюдаются значительные колебания величины коэффициента теплоотдачи.

Литература

1. *Леонтьев А. И. и др.* Разработка фундаментальных основ создания прототипов энергоэффективных теплообменников с поверхностной интенсификацией теплообмена // Материалы конф. РНКТ-4.—М.: Изд-во МЭИ, 2006.—С. 253–257.
2. Пат. 2334912 РФ, МПК F22B33/18 Котельная установка / Жуховицкий Д. Л., Цынаева А. А., Цынаева Е. А.; опубл. 27.09.2008; Бюл. № 27.—6 с.
3. Пат. 2334913 РФ, МПК F22B33/18 Котельная установка / Жуховицкий Д. Л., Цынаева А. А., Цынаева Е. А.; опубл. 27.09.2008; Бюл. № 27.—6 с.
4. *Цынаева А. А., Цынаева Е. А.* Моделирование задач теплообмена и гидрогазодинамики с помощью свободного программного обеспечения // Вестн. Ульянов. гос. тех. ун-та.—2014.—№ 4.—С. 42–45.
5. Code Saturne Homepage.—URL: http://code-saturne.org (дата обращения 12.06.2015).
6. *Menter F. R.* Influence of freestream values on $k-\omega$ turbulence model predictions // Amer. Inst. Aeronautics and Astronautics J.—1992.—Vol. 30, № 6.—P. 1657–1659.
7. *Shin S., Leel K. S. и др.* Measurement of the heat transfer coefficient in the dimpled channel: effects of dimple arrangement and channel height // J. Mech. Sci. Technol.—2009.—№ 23.—P. 624–630.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛОПОТРЕБЛЕНИЕМ ЗДАНИЙ

Е. А. Цынаева

(Росиия, Ульяновск; УлГТУ)

Применение автоматизированных систем управления теплопотреблением (АСУТП) является эффективным средством экономии тепловой энергии [1–8], так как обеспечивает управление тепловым режимом здания по температуре наружного воздуха при изменении направления ветра, интенсивности солнечного излучения с заданной температурой в помещениях. АСУТП, присоединенные по зависимой схеме могут быть с регулирующим органом на прямой или обратной магистрали. Анализ эффективности АСУТП можно провести в динамической постановке по динамическому уравнению отапливаемого помещения:

$$\begin{aligned}\rho_{in}\, c_p V\, \frac{dt_{in}}{d\tau} = k_n F_n(1-k_{in}-k_p)[(t_1 g + t_2(1-g)) - t] - \\ - kF(t_{in}-t_{out}) - c_p G_{inf}(t_{in}-t_{out}),\end{aligned} \tag{1}$$

где t_{in}, t_{out} — температура воздуха внутри и снаружи помещения соответственно; τ — время; k_n — коэффициент теплопередачи отопительных приборов; F_n — площадь отопительных приборов; ρ, c_p — плотность и теплоемкость воздуха в помещении; V — объем помещения; k, F — коэффициент теплопередачи и площадь ограждающих конструкций соответственно; k_p — коэффициент компенсации теплопотерь через пол; G_{inf} — расход инфильтрующегося воздуха; t_1, t_2 — температура теплоносителя в прямой и обратной магистрали соответственно; g — коэффициент подмешивания, равный

$$g = \frac{G_1}{G_1+G_2}. \tag{2}$$

где G_1, G_2 — расход из прямой и обратной магистрали соответственно.

Для АСУТП с регулирующим органом на прямой магистрали коэффициент подмешивания определяется

$$g = g_{cm} + Z\tau, \tag{3}$$

где g_{cm} — средний коэффициент подмешивания; Z — коэффициент, зависящий от конструкции регулирующего органа.

Для АСУТП с регулирующим органом на обратной магистрали коэффициент подмешивания определяется

$$g = 1 - g^*, \tag{4}$$

где g^* — коэффициент подмешивания из обратной магистрали, равный $g^* = \frac{G_2}{G_1+G_2}$. Он определяется выражением

$$g^* = 1 - g^*_{cm} - Z\tau, \tag{5}$$

где g^*_{cm} — коэффициент подмешивания из обратной магистрали, зависящий от графика ЦКР.

Литература

1. *Цынаева Е. А. и др.* Автоматизированная система оптимального управления отоплением учебного заведения // Проблемы энергетики. Изв. вузов.—2007.—№ 3–4.—С. 100–107.
2. *Цынаева Е. А. и др.* Исследование эффективности автоматизированной системы управления отоплением высшего учебного заведения // Вестн. УлГТУ.—2005.—№ 32.—С. 45–48.
3. *Цынаева Е. А. и др.* Влияние параметров температурного графика центрального регулирования отпуска теплоты на эффективность использования автоматизированных систем управления теплопотреблением // Вестн. УлГТУ.—2007.—№ 37.—С. 55–58.
4. *Цынаева Е. А. и др.* Автоматизированная система управления теплопотреблением общежитий // Вестн. УлГТУ.—2006.—№ 33.—С. 56–59.
5. *Пат. 2519907 РФ, МПК F24F5/00* Система обеспечения микроклимата / Ковальногов Н. Н., Цынаева А. А., Школин Е. А.; опубл. 10.03.2014; Бюл. № 7 — 6 с.
6. *Пат. 2509959 РФ, МПК F24F3/00* Система обеспечения микроклимата / Ковальногов Н. Н., Цынаева А. А., Школин Е. А.; опубл. 20.03.2014; Бюл. № 8 — 6 с.
7. *Цынаева Е. А. и др.* Автоматизированная система управления теплопотреблением общежитий // Вестн. УлГТУ.—2006.— № 33.—С. 56–59.
8. *Цынаева А. А., Цынаева Е. А.* Повышение энергоэффективности систем оптимизации теплопотребления зданий // Энергосбережение и экология в жилищно-коммунальном хозяйстве и строительстве городов.—Белгород: Изд-во БГТУ, 2012.—С. 148–153.

О НЕКОТОРЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ СВОЙСТВАХ МАРТИНГАЛЬНЫХ МЕР[1]

В. В. Шамраева

(Россия, Ростов-на-Дону; РГСУ)

В рамках одношаговой модели стохастического базиса со счетным пространством состояний рассматривается случайный процесс $(Z_k, \mathcal{F}_k)_{k=0}^1$, где $\mathcal{F}_0$ — тривиальная σ-алгебра, а $\mathcal{F}_1$ — σ-алгебра, порожденная счетным числом атомов. Множество значений с. в. Z_1 обозначим $\{b_k\}_{k=1}^\infty$. Обозначим через $\widetilde{\mathcal{P}}$ множество всех невырожденных мартингальных мер процесса Z. В теории хааровских интерполяций важное значение имеют мартингальные меры $P \in \widetilde{\mathcal{P}}$, удовлетворяющие ОУНБ [1].

Определение. Говорят, что мера $P = (p_1, p_2, \dots) \in \widetilde{\mathcal{P}}$ удовлетворяет ослабленному условию несовпадения барицентров (ОУНБ), если для любого $i \in \mathbb{N}$ и для любого набора индексов $J \subset \mathbb{N} \backslash \{i\}$ с конечным дополнением $\overline{J} = \mathbb{N} \backslash J$ выполняется неравенство

$$b_i \neq \frac{\sum\limits_{j \in J} b_j\, p_j}{\sum\limits_{j \in J} p_j}.$$

Определение. Будем говорить, что число b, входящее в последовательность $\{b_1, b_2, \ldots\}$, имеет кратность m (m может быть как конечно, так и бесконечно), если в этой совокупности оно присутствует m раз.

В дальнейшем, множество мартингальных мер, удовлетворяющих ОУНБ, также обозначается через ОУНБ. Главная задача данной работы — найти условия существования мартингальных мер, удовлетворяющих ОУНБ.

Перечислим известные факты:

1. Если последовательность $\{b_1, b_2, \ldots\}$ содержит конечное число различных чисел, причем лишь одно из них имеет бесконечную кратность, то ОУНБ$= \varnothing$.

2. Если последовательность $\{b_1, b_2, \ldots\}$ содержит два различных числа, причем оба бесконечной кратности, то ОУНБ$= \widetilde{\mathcal{P}}$.

3. Пусть последовательность $\{b_1, b_2, \ldots\}$ содержит три различных числа. В [2] доказано, что если $b_1 < Z_0 < b_2 < b_3$ при $m_1 = m_2 = \infty$, $m_3 = 1$ или $b_1 < b_2 < Z_0 < b_3$ при $m_1 = 1$, $m_2 = m_3 = \infty$, то ОУНБ$= \widetilde{\mathcal{P}}$. В то же время из результатов работы [1] вытекает, что в остальных случаях ОУНБ строго вложено в $\widetilde{\mathcal{P}}$. А в [3] доказано, что для $P \in \widetilde{\mathcal{P}}$, $Z_0 \neq b_2$ в случае, когда не менее чем два из чисел b_1, b_2, b_3 имеют бесконечную кратность множество ОУНБ$\neq \emptyset$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 13-01-00637а.

В настоящих тезисах представлены условия на мартингальные меры, из которых вытекает принадлежность этих мер множеству ОУНБ. Эти условия сформулированы в случаях, когда последовательность $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ содержит ровно три или ровно четыре различных значения.

Предложение 1. *Пусть $P \in \widetilde{\mathcal{P}}$, а множество $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ состоит из трех различных чисел $b_1 < b_2 < b_3$, каждое из которых имеет бесконечную кратность, и при этом $b_1 < Z_0 < b_2 < b_3$. Если для любого $k \geqslant 1$ выполняются неравенства*

$$(b_2 - b_1)p_{3k-2} > (b_3 - b_2)\sum_{j=k}^{\infty} p_{3j}$$

и

$$(b_3 - b_2)p_{3k} > (b_2 - b_1)\sum_{j=k+1}^{\infty} p_{3j-2},$$

то мера P удовлетворяет ОУНБ.

Предложение 2. *Пусть $P \in \widetilde{\mathcal{P}}$, а множество $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ состоит из четырех различных чисел $b_1 < b_2 < b_3 < b_4$, каждое из которых имеет бесконечную кратность, и при этом $b_1 < Z_0 < b_2 < b_3 < b_4$. Если для любого $k \geqslant 1$ выполняются неравенства*

$$(b_2 - b_1)p_{4k-3} > (b_4 - b_2)\left(\sum_{j=k}^{\infty} p_{4j-1} + \sum_{j=k}^{\infty} p_{4j}\right)$$

и

$$(b_4 - b_3)p_{4k} > (b_3 - b_1)\left(\sum_{j=k+1}^{\infty} p_{4j-3} + \sum_{j=k+1}^{\infty} p_{4j-2}\right),$$

то мера P удовлетворяет ОУНБ.

Литература

1. *Данекянц А. Г., Павлов И. В.* Об ослабленном свойстве универсальной хааровской единственности.—М.: Теория вероятностей и ее применения.—2004.—Т. 11, вып. 3.—С. 506–508.
2. *Павлов И. В., Цветкова И. В., Шамраева В. В.* Некоторые результаты о мартингальных мерах одношаговых моделей финансовых рынков, связанные с условием несовпадения барицентров // Вестн. РГУПС.—2012.—№ 3.—С. 177–181.
3. *Павлов И. В., Цветкова И. В., Шамраева В. В.* О существовании мартингальных мер, удовлетворяющих ослабленному условию несовпадения барицентров: конструктивистский подход // Вестн. РГУПС.—2014.—№ 4.—С. 132–139.

МОДЕЛИРОВАНИЕ БЕЗОКОННОГО РАСПИСАНИЯ ПОТОКОВЫМИ МЕТОДАМИ

А. З. Якубов (Россия, Махачкала; ДГУ),
Х. Д. Аль-Шехли Али (Россия, Махачкала; ДГУ),
А. С. Джамирзаев (Россия, Махачкала; ДГУ)

Рассматривается вопрос существования для матрицы M из 7 столбцов, каждый столбец которой содержит перестановку из чисел $1, 2, \ldots, n$ и множество повторяющихся нулей, а каждая строка содержит либо 2, либо 5, либо 7 ненулевых элементов (причем все ненулевые элементы в каждой строке попарно различны) — матрицы M^* исходных размеров, такой, что в любой линии (т. е. в столбце и строке) искомой матрицы количество экземпляров каждого числа такое же, что и в соответствующей линии исходной матрицы и в каждой строке искомой матрицы все ненулевые элементы располагаются слитно, друг за другом.

Матрицу обладающую свойствами 1) и 2) будем называть дефрагментированной, а нахождение дефрагментированной матрицы M^* — дефрагментацией M.

В общем случае задача дефрагментации NP-полная [1], в данной статье приведено полиномиальное решение задачи в частном случае.

Множество строк исходной матрицы, содержащих в точности q ненулевых элементов, будем обозначать через $M^{(q)}$, $q = 2, 5, 7$.

(M) — транспортная сеть (с заданными на дугах нижними и верхними потоковыми ограничениями), построенная по матрице следующим образом:

<u>*Вершины:*</u> кроме источника и стока, вводятся n вершин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, соотнесенные числам $1, 2, \ldots, n$; $k - |M(2)|$ вершин $y_1, y_2, \ldots, y_{k-|M(2)|}$ последовательно соотнесенных строкам множеств $M^{(5)}$ и $M^{(7)}$.

<u>*Дуги:*</u> от источника к каждой из вершин x_s проведена дуга с потоковыми ограничениями $[3, З]$, от вершины x_s к вершине y_t дуга проведена тогда и только тогда, когда строка множества $M^{(5)}$, либо $M^{(7)}$ соответствующая вершине y_t содержит число s, $s = 1, 2, \ldots, n$, причем такая дуга имеет потоковые ограничения $[0, 1]$; от каждой вершины y_t, соответствующей множеству $M^{(q)}$ проведена дуга к стоку T с ограничениями $[3, З]$.

Доказано следующее

Утверждение. *В дефрагментированном варианте M^* матрицы M ненулевые элементы строк множества $M^{(5)}$ могут начинаться только с 1-го или 3-го столбца, а ненулевые элементы строк множества $M^{(2)}$ могут начинаться только с 1-го, либо 6-го столбца.*

Доказательство проводится от противного.

Получены необходимые и достаточные условия дефрагментации матрицы M.

Теорема. *Для дефрагментации матрицы M необходимо и достаточно существование допустимого потока в транспортной сети $T(M)$.*

$\lhd$ *Необходимость.* Пусть существует матрица M^*, выберем q-ю строку, входящую либо во множество $M^{(5)}$, либо в $M^{(7)}$, через m, 1, p обозначим соответственно ненулевые представители 3-го, 4-го, 5-го столбца данной строки. Пусть данной строке соответствует вершина y_t транспортной сети $T(M)$. Тогда положим поток по дугам (x_m, y_t), (x_1, y_t) и (x_p, y_t) равным единице. Положим поток по каждой дуге T, выходящей из источника, равный 3, и продолжим по всем дугам, инцидентным вершинам y_t по непрерывности. Получили допустимый поток в транспортной сети $T(M)$.

Достаточность. Пусть теперь в транспортной сети $T(M)$ существует допустимый поток. Тогда каждая вершина x_s двудольного графа $G(X \smile Y, E)$, образованного вершинами x_s, y_t и дугами (x_s, y_t), вдоль которых поток равен 1, имеет степень 3.

Обозначим через $N^{(1)}$, $N^{(2)}$ и $N^{(3)}$ множества, образованные концами ребер, принадлежащих множеству X из соответствующих паросочетаний двудольного графа.

Поместим множества $N^{(1)}$, $N^{(2)}$ и $N^{(3)}$ в 3-й, 4-й и 5-й столбцы матрицы M^* соответственно, следя за тем, чтобы число из $N^{(d)}$ располагалось в строке с тем же номером, что и у строки из M, откуда выбрано число p. И удалим множества $N^{(d)}$ из соответствующих строк матрицы M.

Обозначим через W множество строк матрицы M, в которых после удаления множеств $N^{(d)}$ остались ненулевые элементы: из сказанного выше следует, что в каждой строке этого множества количество ненулевых элементов равно 2 или 4.

Существует такое разбиение 4-х элементных множеств w_j на «потомки» — двухэлементные подмножества, после которого полученное «расширенное» семейство двухэлементных множеств допускает разбиение на два подсемейства W_1 и W_2 такие, что а) никакие два потомка одного четырехэлементного множества не попадают в одно и тоже подсемейство; б) в каждом из подсемейств количество экземпляров любого элемента равно 2 [2] .

Пары, образующие W_1, расположим в первых двух столбцах матрицы M^*, а пары, образующие множество W_2, в последних двух столбцах матрицы M^*, таким образом, чтобы каждая пара располагалась в строке с тем же номером, что и у строки из M, и в каждом из двух столбцов (1-м и 2-м, 6-м и 7-м) матрицы M^* ненулевые элементы были попарно различны.

В итоге получили матрицу M^* — дефрагментированный вариант матрицы M.

Литература

1. *Магомедов А. М.* Дефрагментация таблицы перестановок из 4 столбцов // Дискретная математика.—2009.—Т. 21, № 4.—С. 95–104.
2. *Магомедов А. М.* Дефрагментация матрицы перестановок из шести столбцов. Деп. в ВИНИТИ, 8700-В-87.
3. *Якубов А. З., Ибрагимов М. Г.* Потоковые методы в решении задачи дефрагментации матрицы расписания // Материалы IV междунар. конф. «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики».—Нальчик: Терскол, 2013.—С. 115–117.

Секция IV

Современные проблемы математического образования

ОСОБЕННОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ КОНЦЕПЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ПЕРСПЕКТИВНОМ РАЗВИТИИ РЕГИОНА

В. С. Абатурова (Россия, Владикавказ; ЮМИ),
Е. И. Смирнов (Россия, Ярославль; ЯГПУ),
С. А. Тихомиров (Россия, Ярославль; ЯГПУ)

В успешности преодоления современных вызовов для России и, в частности, модернизации российского образования в направлении конкурентноспособности выпускников и специалистов на отечественном и мировом рынке труда и завоевании приоритетов в науке и технологиях основополагающую роль играет математическое образование. Рубежным в данном направлении являются Указ Президента РФ от 7 мая 2012 г. № 599 и Распоряжение Правительства России от 24 декабря 2013 г. № 2506-р «О концепции развития математического образования в Российской федерации». Во всех регионах развернулась работа по разработке Планов мероприятий по реализации Концепции, детализирующих и расширяющих фундаментальные положения на ближайшее пятилетие. Ниже предлагаются конкретные направления, этапы и технологии реализации Концепции, определяющие эффективные результаты в развитии мотивационной сферы учения, математического и научного мышления обучающихся, в актуализации методик освоения современных достижений в математике и реального использования информационных технологий в освоении математического знания и приложений в реальной жизни, науке и технике. Одной из особенностей предлагаемых мероприятий является их нацеленность на каждого ученика, или точнее, *на увлеченного математикой ученика* (в отличие от традиционной направленности на одаренных или отстающих в математике учеников). Другой особенностью обоснования выбранных направлений является реализация *концепций наглядного моделирования* математических объектов и процессов [1] и *фундирования опыта и качеств* личности ученика [2]. При этом успешность инновационных мероприятий по реализации Концепции всецело определяется профессиональной культурой и личностной заинтересованностью педагога. И то, и другое, требует *существенных усилий* в организации повышения квалификации педагогов, мониторинга результатов обучения и профессиональной готовности педагога, материально-технического и инновационного методического оснащения и обеспечения учебного процесса [3]. Необходимость актуализации данных направлений подтверждается, например, реальным состоянием математической подготовленности абитуриентов педагогических вузов. Экспертные оценки и экспериментальные данные результатов подготовленности абитуриентов, проведенные вузами в различных регионах России, показывает неразвитость ключевых и профессионально-важных интеллектуальных операций: анализ, синтез, различение, понимание, моделирование, обобщение, конкретизация, абстрагирование и др.; наблюдается разрыв между интересом и знанием конкретных информационных технологий и средств и значимостью этих средств и эффективностью применения их для нужд математики; индивидуальные особенности учеников (процессы восприятия, мотивации, коммуникации, рефлексии, эмоционально-волевые усилия и т. п.) недостаточно учитываются в организации процесса обучения математике. Нами предлагается развертывание в образовательной среде региона пилотного проекта из четырех кластеров развития, состоящих из инициативных образовательных учреждений (3–4 средних школы, 8–10 инициативных и компетентных педагогов):

• *психодиагностическая культура педагога* как ведущая характеристика готовности и успешности управления образовательным процессом;

• *новое в математике с приложениями* как стимул проектирования элективных курсов, факультативных занятий, исследовательской деятельности учеников, и самое главное, повышения учебной мотивации (фрактальная геометрия и нечеткие множества, стохастические модели и анализ Фурье, обобщенные конструкты школьной математики, историогенез математических открытий и т. п.);

• *информационно-коммуникационные технологии и средства* как эффективные инструменты освоения математики (системы динамической геометрии и компьютерной алгебры, дистанционное обучение, педагогические программные продукты, малые средства информатизации и т. п.);

• *интеллектуальные игры* (*шахматы, го, житто*) как эффективные средства развития интеллектуальных операций школьников и повышения интереса к математике за счет поэтапного выявления математических закономерностей в играх.

Выстраиваются этапы инновационного развития, перечень мероприятий для каждого этапа, система повышения квалификации и стимулирования инновационной деятельности педагога.

Литература

1. *Смирнов Е. И.* Технология наглядно-модельного обучения математике.—Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 1997.—323 с.
2. *Шадрикова В.Д.* Подготовка учителя математики: Инновационные подходы.—М.: Гардарики, 2002.—383 с.
3. *Смирнов Е. И.* Фундирование опыта в профессиональной подготовке и инновационной деятельности педагога.—Ярославль: Изд-во «Канцлер», 2012.—646 с.

УРОКИ ОБОБЩАЮЩЕГО ПОВТОРЕНИЯ ПО ПЛАНИМЕТРИИ КАК РАСПОЗНАВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ

В. Н. Дятлов

(Россия, Новосибирск, НГУ; Владикавказ, ЮМИ)

Изучение и повторение школьных курсов геометрии (планиметрии и стереометрии) традиционно сопряжено с определенными трудностями. Одной из причин такого положения является большое по сравнению с курсом алгебры разнообразие задач и ввиду этого затруднения в формировании обозримого набора методов, позволяющих решать достаточно обширный круг задач. Поэтому есть потребность в разработке таких средств, которые позволяли бы решать задачи не по образцам или примеров, а на основе других принципов, в частности, построенных на применении утверждений и общих рекомендаций.

Предлагается процесс решения задач во время обобщающего повторения планиметрии организовать на основе постановки вопросов и после ответа на них выполнении действий, предписанных рекомендациями. Таких вопросов предлагается всего три, и оказывается, что во многих ситуациях этого достаточно. Поставив вопрос, надо обратиться к набору геометрических фрагментов (шаблонов), распознать среди них те, которые имеют отношение к решаемой задаче, и выполнить рекомендации, сопровождающие найденный фрагмент. Затем вернуться к постановке одного из трех вопросов, и поступать так до тех пор, пока не прочертится логическая линия, ведущая от данных к требуемому.

В качестве задаваемых вопросов предлагаются следующие.

1. В чем особенности задачи, связанные с данными? При ответе на этот вопрос надо отметить, какие фигуры участвуют в задаче, с какой целью сообщены те или иные данные, какие есть выдающиеся отрезки и т. д.

В результате ответа на этот вопрос желательно выбрать такой фрагмент из предлагаемого набора, который присутствует в данной задаче. При выборе фрагмента надо отвлечься от каких-то деталей условия задачи, не присущих найденному фрагменту, и учесть их в дальнейшем. После нахождения фрагмента надо выполнить соответствующие ему пожелания и продолжить решение, снова задавая один из вопросов.

Первый вопрос можно конкретизировать, дополнив его таким вопросом: **что можно получить из данных за один шаг**? Постановку этого вопроса будем иногда называть «ходом вперед», от условия к результату. В качестве ответа выводим простые, непосредственные следствия из имеющихся данных, чем по существу изменяем эти данные, обогащая их и тем самым переходя к новой задаче с расширенным набором данных.

2. В чем особенности задачи, связанные с требуемым? Этот вопрос обрабатывается так же, как и первый — надо обратиться к набору шаблонов и изучить, есть ли в нем что-то связанное с искомыми величинами. Этот вопрос будем дополнять вопросом: «**откуда можно получить требуемое за**

один шаг?» и говорить о нем как о «ходе назад», от требуемого к условиям, позволяющим сменить цель, используя прямые источники получения требуемого. Этим мы переформулируем задачу и сосредотачиваемся на нахождении другой величины, чем в исходной задаче. Например, если в задаче надо найти площадь, то, вспомнив формулы площади и выбрав ту из них, которая более всего подходит к данным задачи, мы тем самым обращаемся к нахождению величин, входящих в формулу. Или если требуется найти радиус описанной около треугольника окружности, то надо вспомнить теорему синусов, в которой эта величина участвует, и сосредоточиться на нахождении других величин, и т. д.

3. Все ли данные задачи использованы? Этот вопрос стоит задавать в тот момент, когда уже исчерпаны возможности первых двух, а логической цепочки от данных к результату не найдено. Бывает так, что мы пытаемся решить задачу, забыв о каких-то из ее данных. Перечитывание условий задачи и внимательный контроль использования всех ее данных могут позволить продолжить решение задачи.

Постановки вопросов, поиск шаблонов, выполнение рекомендаций делает каждый шаг решения мотивированным, целесообразным, выполняемым по какой-то причине, а не просто потому, что действие этого шага мы умеем делать. Изложенную технологию можно применять и в процессе изучения планиметрии.

РАСШИРЕНИЕ ЗНАНИЙ УЧАЩИХСЯ ПО ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ПОСРЕДСТВОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Н. И. Лобанова

(Россия, Астрахань; АстГУ)

Всестороннее развитие учащихся, формирование у них научного мировоззрения — важнейшая задача учреждений среднего и высшего профессионального образования. Важная роль при этом отводится дополнительному образованию детей, составляющему вариативную часть общего образования. Согласно ФЗ «Об образовании в РФ», основой образовательного процесса в дополнительном образовании учащихся является реализация дополнительных общеобразовательных программ, выходящих за рамки (общих) основных и имеющих конкретные образовательные цели.

Одним из средств достижения перечисленных целей является введение в школе занятий по математике научных объединений учащихся (НОУ). Занятия по математике НОУ направлены на развитие способностей и интересов учащихся в сочетании с общеобразовательной подготовкой, зарождение интереса к математике на первичном уровне, поддерживании его до познавательного уровня. Взаимосвязь обязательного обучения математике в общеобразовательной школе и занятий по математике в рамках дополнительного образования выступает как средство осуществления принципа непрерывности и приемственности.

В работе рассмотрен один из вариантов обеспечения преемственности на примере изучения дробно-рациональных уравнений с параметром. Предлагаемый материал дополняет стандартную программу школьного курса математики, предполагает углубленное изучение предмета по данной теме, что будет способствовать совершенствованию и развитию важнейших математических умений, предусмотренных программой.

Для многих учащихся уравнения с параметром являются непривычными и сложными. Параметр, будучи фиксированным, но неизвестным числом, имеет как бы двойственную природу. Во-первых, предполагаемая известность позволяет «общаться» с параметром как с числом, а во-вторых, — степень свободы общения ограничивается его неизвестностью [1]. Трудности решения задач с параметром возникают даже при решении простейших уравнений, содержащих параметры, приходится производить ветвление всех значений параметров на отдельные классы, при каждом из которых задача имеет решение.

Литература

1. *Горнштейн П. И., Полонский В. Б., Якир М. С.* Задачи с параметрами.—Киев: РИА «Текст»; МП «Око», 1992.—290 с.

ОБУЧЕНИЕ МАТЕМАТИКЕ: ОТНОШЕНИЕ К МАТЕМАТИЧЕСКИМ РЕЗУЛЬТАТАМ

Ю. Б. Мельников (Россия, Екатеринбург; УрГЭУ),
С. А. Шитиков (Россия, Екатеринбург; УрГЭУ),
С. Г. Синцова (Россия, Екатеринбург; УрГЭУ)

Под математическим результатом мы понимаем математические понятия и утверждения, их формулировки, математические рассуждения и алгоритмы. Мы выделили несколько утверждений, которым удовлетворяет деятельность в обучении математике, и приняли их в качестве постулатов создаваемой теории.

Постулат приоритетного результата учебно-математической деятельности: главным результатом учебно-математической деятельности является изменение субъекта деятельности, а собственно продукт деятельности менее значим.

Постулат дидактической актуальности компонентов деятельности: с дидактической точки зрения компоненты деятельности, кроме субъекта, важны лишь в период активного взаимодействия субъекта с предметом. После получения результата математический продукт деятельности с дидактической точки зрения перестает играть какую-либо роль в обучении. Продукт деятельности становится важным только в случае, когда он вновь вовлекается в деятельность обучаемого: как объект для рефлексии, как основа для мотивации, как основа для математических методов, как основа для формирования гипотез и др.

Постулат приоритетного компонента учебно-математической деятельности. Мы ориентируемся на традиционные результаты теории деятельности [1, 2], согласно которым компонентами деятельности являются: субъект, цель, предмет, орудие (инструмент) деятельности, мотив деятельности, операции деятельности, продукт, причем при выполнении действия в каждый конкретный момент времени для обучаемого является приоритетным только один из этих компонентов деятельности.

В работе показано, что в случае выполнения этих постулатов актуальными для учебно-математической деятельности оказываются только три варианта отношения к математическому феномену:

1) как к материалу, который надо запомнить и воспроизвести;

2) как к объекту, который будем преобразовывать и комбинировать его с другими;

3) как к инструменту деятельности.

Отношение к математическому результату существенно сказывается на особенностях системы обучения, ее характере и результатах. Например, в отношении к математическому результату как к материалу для запоминания приоритетными являются механизмы запоминания. Видимо, для процесса обучения целесообразно сочетать все три варианта отношения к математическому результату.

Литература

1. *Леонтьев А. Н.* Категория деятельности в современной психологии // Вопросы психологии.—1979.—№ 3.—С. 11–15.
2. *Рубинштейн С. Л.* Основы общей психологии. Сер.: Мастера психологии.—СПб.: Изд-во «Питер», 2002.—720 с.

АВТОРСКАЯ КОНЦЕПЦИЯ ГУМАНИТАРНО-ОРИЕНТИРОВАННОГО ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ КАК ИНСТРУМЕНТ РЕАЛИЗАЦИИ ФГОС ООО В ОТНОШЕНИИ МАТЕМАТИКИ

А. Х. Назиев

(Россия, Рязань, РГУ им. С. А. Есенина; РИРО)

Российская школа переходит на новый стандарт обучения — Федеральный Государственный Образовательный Стандарт Основного Общего Образования, коротко — ФГОС ООО, далее — просто Стандарт.

«Стандарт устанавливает требования к результатам освоения обучающимися основной образовательной программы основного общего образования:

личностным, включающим готовность и способность обучающихся к саморазвитию и личностному самоопределению, сформированность их мотивации к обучению и целенаправленной познавательной деятельности, системы значимых социальных и межличностных отношений, ценностно-смысловых установок, отражающих личностные и гражданские позиции в деятельности, социальные компетенции, правосознание, способность ставить цели и строить жизненные планы, способность к осознанию российской идентичности в поликультурном социуме;

метапредметным, включающим освоенные обучающимися межпредметные понятия и универсальные учебные действия (регулятивные, познавательные, коммуникативные), способность их использования в учебной, познавательной и социальной практике, самостоятельность планирования и осуществления учебной деятельности и организации учебного сотрудничества с педагогами и сверстниками, построение индивидуальной образовательной траектории;

предметным, включающим освоенные обучающимися в ходе изучения учебного предмета умения, специфические для данной предметной области, виды деятельности по получению нового знания в рамках учебного предмета, его преобразованию и применению в учебных, учебно-проектных и социально-проектных ситуациях, формирование научного типа мышления, научных представлений о ключевых теориях, типах и видах отношений, владение научной терминологией, ключевыми понятиями, методами и приемами.» [1]

«В основе Стандарта лежит системно-деятельностный подход», — заявляется в п. 5 Стандарта. Однако в нем ничего не говорится о том, какою должна быть эта деятельность. И это понятно, поскольку конкретные черты деятельности определяются спецификой изучаемого предмета. Математика в этом отношении находится на особом положении, ибо в ней имеется ключевая деятельность, включающая в себя все остальные виды деятельности, — это деятельность по открытию доказательств. Сошлемся в этой связи на наши работы (см., в частности, [2] и [3]), в которых сформулирована и обоснована концепция гуманитарно-ориентированного преподавания математики. Приведем положения этой концепции.

Концепция преподавания математики

1°. Математика — это доказательство.

2°. Преподавать математику — значит систематически побуждать учащихся к открытию собственных доказательств.

3°. Преподавание математики является незаменимым средством формирования человека культурного: мыслящего, нравственного и свободного.

Как видим, положение 2 нашей концепции прямо нацеливает на открытие нового, причем не эпизодически, на так называемых «уроках открытия нового знания», а систематически, как и должно быть при системно-деятельностном подходе. Этим полностью покрываются требования Стандарта к предметным результатам освоения основной образовательной программы.

Относительно метапредметных результатов заметим, что вся математика является в системе образования метапредметом. Как писал Д. Пойа [4, с. 309]: «Пределы математики — это вся область доказательных рассуждений, относящихся к любой науке, достигшей такого уровня развития, при котором основные положения этой науки могут быть сформулированы в абстрактной форме». Тем самым, первое положение концепции полностью покрывает требования Стандарта, относящиеся к метапредметным результатам обучения.

Наконец, третье положение концепции не только покрывает, но и значительно перекрывает требования Стандарта, относящиеся к личностным результатам обучения. [Разработчики Стандарта совершенно упустили из виду такие важные личностные качества, как развитое мышление (в том числе образное), способность руководствоваться разумом в убеждениях и помыслах, духовная культура, нравственность, правильное понимание человеческой свободы. См. об этом в упомянутых выше работах автора.]

Литература

1. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (5–9 кл.).—(Размещен в интернете во многих местах).
2. *Назиев А. Х.* Гуманитаризация основ специальной подготовки учителей математики в педагогических вузах: Дис. ... д. пед. н.—М.: МПГУ, 2000.—URL: http://people.rsu.edu.ru/~a.naziev/DissB/DissB.pdf.
3. *Назиев А. Х.* Гуманитарно ориентированное преподавание математики в общеобразовательной школе.—Рязань: Изд-во РИРО, 1999.—URL: http://people.rsu.edu.ru/~a.naziev/HumEd/HumEd.pdf.
4. *Пойа Д.* Математическое открытие.—М.: Наука, 1970.

Д. Д. МОРДУХАЙ-БОЛТОВСКОЙ И ТРАДИЦИИ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В ЮЖНОМ ФЕДЕРАЛЬНОМ (ВАРШАВСКОМ, РОСТОВСКОМ) УНИВЕРСИТЕТЕ

Ю. С. Налбандян

(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Дмитрий Дмитриевич Мордухай-Болтовской (1876–1952), выпускник петербургского университета (подробности о его жизненном пути можно найти, например, в [1]), считается одним из основателей ростовской математической школы. Однако не меньшую роль он сыграл в организации математического образования, причем не только в Ростове. Во вступительной части доклада рассказывается о наиболее ярких моментах биографии выдающегося ученого и педагога.

В 1898 году трудолюбивый и работоспособный обладатель диплома первой степени был рекомендован профессорами К. А. Поссе и А. А. Марковым Г. Ф. Вороному, подбиравшему кадры математиков для работы в только что открывшемся Варшавском политехническом институте. В докладе планируется проанализировать деятельность Д. Д. Мордухай-Болтовского, связанную с организацией практических занятий по математическому анализу и подготовкой к изданию задачников по различным отделам высшего анализа в 1899–1914 гг. Особое внимание уделяется подходу Дмитрия Дмитриевича к индивидуальной работе со студентами, его убежденности в том, что каждый час практических занятий, проведенных под руководством преподавателя, вселяет «уверенность в прочности преподаваемых знаний... ибо без умения дифференцировать и интегрировать невозможно воспринять те общие идеи высшего порядка, которые излагает на своих лекциях профессор». Более подробно о работе Д. Д. Мордухай-Болтовского в Варшаве рассказано в [2] (электронную версию этой публикации можно найти здесь: `http://www.math.sfedu.ru/mexmat/ma/nalb/PDF/mord.pdf`).

Следующая часть выступления будет посвящена лекционным курсам Д. Д. Мордухай-Болтовского (введение в анализ, дифференциальное исчисление, интегральное исчисление, определенный интеграл, кратные интегралы, эллиптические функции, теория функций комплексного переменного), которые читались как в Варшаве, так и в Ростове-на-Дону (используются материалы из фонда Р-46 Государственного Архива Ростовской Области (ГАРО) и статья [3]).

В заключительном разделе доклада рассматриваются такие вопросы, как взгляды Д. Д. Мордухай-Болтовского на ключевые проблемы изучения математики, сформулированные им в последние годы жизни, деятельность его учеников и преемственность в преподавании математического анализа в Ростовском (Южном федеральном) университете.

Литература

1. *Минковский В. Л.* Д. Д. Мордухай-Болтовской. К 50–летию научно-педагогической деятельности // Математика в школе.—1949. —№ 2.—С. 45–57.
2. *Налбандян Ю. С.* Научно-педагогическая деятельность профессора Д. Д. Мордухай-Болтовского в Варшаве (1898–1916).—23 с. Деп. в ВИНИТИ 20.07.1998, № 2290-В98.
3. *Пырков В. Е., Ханин В. П.* Курсы лекций по математическому анализу, составленные Д. Д. Мордухай-Болтовским // Наука и техника: Вопросы истории и теории.—СПб.: СПбФ ИИЕТ РАН, 2001.—Вып. 17.—С. 80–81.

ПРИМЕНЕНИЕ СИМВОЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Ю. В. Никонорова
(Россия, Волгодонск; ВИТИ НИЯУ МИФИ)

По оценкам государственной корпорации Росатом потребность в новом персонале для атомной отрасли составляет 3–3,5 тыс. человек в год. Специалист-ядерщик должен владеть методикой проведения численных компьютерных расчетов, поэтому умение работать в современных системах компьютерной математики является одним из требований, предъявляемых к выпускникам ядерных специальностей вузов.

К интеллектуальным лидерам компьютерной математики относятся в первую очередь математические пакеты Maple и MATLAB. Освоение даже небольшой части возможностей этих систем дает большой эффект в процессе обучения высшей математике и дисциплин, основанных на математических расчетах. Несмотря на огромные преимущества, которые предоставляет использование систем символьной математики, не следует думать, что эти системы позволяют заменить учащимся математические знания. Лишь те пользователи, которые понимают суть математических вычислений могут получить серьезные результаты. Поэтому применение таких систем в обучении студентов технических специальностей способствует повышению фундаментальности математического образования.

Рассмотрим применение в вузовском обучении пакета аналитических вычислений Maple. В системе Maple очень удобно производить компьютерные эксперименты, в которых можно за небольшое время рассмотреть разные варианты решения исследуемой задачи и визуализировать результаты вычислений. Основное достоинство программы — возможность представлять вычисления в символьном виде, упрощать и преобразовывать выражения с одной и несколькими переменными. Система содержит большое количество специальных чисел и функций, которые используются в различных областях математики, технических дисциплинах. Помимо стандартной библиотеки Maple имеет еще и пакеты расширения, которые позволяют реализовать дополнительные функции системы. Систему Maple студенты технических специальностей могут использовать не только для сложных вычислений при проведении исследовательских работ по дисциплинам, содержащим математические расчеты. Эту программу могут использовать и студенты младших курсов при изучении высшей математики для визуализации полученных в ходе лекционных и практических занятий знаний. Например, Maple, обладая большими возможностями двумерной и трехмерной графики, позволяет демонстрировать основные характеристики исследуемых функций. Анимационные возможности системы позволяют оживить графические объекты, заставить их двигаться. В системе можно представлять наборы данных в графическом виде и искать закономерности, рассматривая построенный график в рабочем окне программы. Студенты младших курсов могут использовать систему для проверки собственных знаний из разных разделов математики. В этом случае Maple выполняет роль задачника, в котором можно увидеть только постановку задачи и правильный ответ, а ход решения недоступен. Пакет аналитических вычислений Maple полезен не только студентам, но и преподавателям, которые вынуждены составлять и прорешивать большое количество задач для формирования фонда оценочных средств по разным разделам математики, что является чрезвычайно трудоемкой задачей. Преподаватель имеет возможность составлять задачи, подбирая нужные параметры прямо в рабочем окне программы, и сразу получать ответ. Содержимое рабочего окна программы можно выводить на печать.

Таким образом, можно сделать вывод, что программа достаточна полезна в использовании, ее можно использовать для самообразования и научной работы. Это должно способствовать росту интереса студентов технических специальностей к использованию Maple в качестве обучающего средства и проведения математических исследований.

Литература

1. *Дьяконов В. П.* Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах.—М.: ДМК-Пресс, 2011.—800 с.
2. *Говорухин В. Н., Цибулин В. Г.* Компьютер в математическом исследовании. Учебный курс.—СПб.: Питер, 2001.—624 с.

УМК «МАТЕМАТИКА. ПСИХОЛОГИЯ. ИНТЕЛЛЕКТ» КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННОГО СТИЛЯ МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ

Л. П. Охват

(Россия, Владикавказ; МБОУ «СОШ № 1 ст. Архонская»)

Одной из ключевых идей концепции математического образования является обладание каждым гражданином необходимой математической грамотностью.

В Федеральных государственных стандартах основного общего образования по этому поводу отмечено, что изучение предметной области «Математика и информатика» должно обеспечить: осознание значения математики и информатики в повседневной жизни человека; формирование представлений о социальных, культурных и исторических факторах становления математической науки; понимание роли информационных процессов в современном мире; формирование представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления. Одним из аспектов, которые должны отражать предметные результаты изучения математики, является развитие умений применять изученные понятия, результаты, методы для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин с использованием при необходимости справочных материалов, компьютера, пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчетах [1].

Однако, по результатам исследования математической грамотности, 15-летние российские учащиеся оказались в конце четвертой десятки стран — участниц исследования. Возможно, что причины этого кроются в крайностях реализации академической направленности школьного курса математики, что приводит к уменьшению внимания к практической составляющей обучения математике в школе.

Соответственно предлагается сменить приоритеты в сфере школьного образования: главной целью обучения является не достижение учащимися определенного уровня предметных знаний и умений, а формирование системы ключевых компетенций, позволяющих молодым людям успешно применять усвоенные знания в практической ситуации и тем самым успешно адаптироваться в динамическом социуме [2].

В этом контексте становится важным формирование у обучающихся практико-ориентированного мышления. Большими возможностями для реализации этой цели обладает УМК «Математика. Психология. Интеллект». Соруководители МПИ: проффесор, д-р пед. наук Э. Г. Гельфман, проффесор, д-р психолог. наук М. А. Холодная. Вот некоторые аспекты развития практико-ориентированного мышления учащихся, нашедшие отражение в УМК «МПИ».

В современных условиях каждый должен уметь критически анализировать информацию, полученную в той или иной форме. Одним из решений этой проблемы является организация систематической работы с учебным текстом. УМК

«МПИ» предлагает тексты разного типа: повествовательные, проблемные, учебные сюжетные тексты и др. Сюжетная основа позволяет реализовать важный методический прием: предъявление текста в контексте. Ребенок учится вычленять основное математическое содержание, работать с развернутыми учебными текстами. Тексты учебников включают в себя элементы диалога с обучающимися: обращения к читателю, вспомогательные вопросы и задания. Диалоговый характер текстов позволяет читателям активно включиться в процесс изучения нового материала, обращает внимание на нюансы теории, приучает задавать вопросы и отвечать на них. При изложении теоретического материала описываются поиски решения в различных ситуациях, в том числе практических. В конце каждого параграфа присутствует раздел «Проверь себя». С его помощью обучающиеся могут научиться осуществлять целеполагание, планирование, самоконтроль своей учебной деятельности [3].

Большими возможностями для развития практико-ориентированного мышления обладают задачи с практическим содержанием. Обучение с использованием практико-ориентированных задач приводит к более прочному усвоению информации, так как возникают ассоциации с конкретными действиями и событиями. Также для развития практико-ориентированного мышления очень полезен прием установления соответствия между текстом, рисунком, схемой, конструирования и моделирования математических задач по данным таблицы, краткой записи, рисунка, схемы и т. п.

Таким образом, обучение по учебно-методическому комплекту «МПИ» позволяет развивать практико-ориентированное мышление обучающихся.

Литература

1. Федеральный государственный образовательный стандарт полного общего образования.—М.: Просвещение, 2010.—215 с.
2. *Холодная М. А.* Приоритеты современного школьного образования: способность адаптироваться к социуму или интеллектуальное развитие и воспитание?—URL: http: // metodist.lbz.ru/lections/2/files/3.doc.
3. *Гельфман Э. Г., Холодная О. В.* Математика: методическое пособие для 5 класса.—М.: БИНОМ: Лаборатория знаний, 2013.—231 с.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

BashSU — Bashkir State University
KFU — Kazan (Volga Region) Federal University
NOSU — North Osetian State University named after K. L. Khetagurov
SMI — South Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences
TarSU — Taraz State University named after M. Kh. Dulaty
TUD — Technical University Dresden
Академия ФСО России — Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации
АлтГУ — Алтайский государственный университет
АстГУ — Астраханский государственный университет
АТИ ДГТУ — Азовский технологический институт (филиал) Донского государственного технического университета
АУ МВД РФ — Академия управления Министерства внутренних дел Российской Федерации
БелГУ — Белорусский государственный университет
БГУ — Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского
БТУ — Ближневосточный технический университет
ВГУ — Воронежский государственный университет
ВИТИ НИЯУ МИФИ — Волгодонский инженерно-технический институт (филиал) Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ»
ВИ МВД — Воронежский институт МВД России
ВИУ — Владикавказский институт управления
ВНЦ РАН — Владикавказский научный центр Российской академии наук
ДГИНХ — Дагестанский государственный институт народного хозяйства
ДГТУ — Донской государственный технический университет
ДГУ — Дагестанский государственный университет
ДНЦ РАН — Дагестанский научный центр Российской академии наук
ИГМ НАНУ — Институт гидромеханики Национальной академии наук Украины
ИМ СО РАН — Институт математики имени С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук
ИнгГУ —Ингушский государственный университет
ИПМА — Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук
ИСОиП (филиал) ДГТУ — Институт сферы обслуживания и предпринимательства (филиал) Донского государственного технического университета
ИЯФ АН РУз — Институт ядерной физики Академии наук Республики Узбекистан
КБГУ — Кабардино-Балкарский государственный университет
КФУ — Казанский (Приволжский) федеральный университет
МГУ — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

МГУ ИТРЭ — Московский государственный университет информационных технологий, радиотехники и электроники
МПГУ — Московский педагогический государственный университет
НГУ — Новосибирский государственный университет
НИУ МАИ — Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
НИЯУ МИФИ — Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
ОГУ — Орловский государственный университет
ПГУ — Полоцкий государственный университет
ООО «Пневмакс» — Общество с ограниченной ответственностью «Пневмакс»
РГСУ — Ростовский государственный строительный университет
РГУ им. С. А. Есенина — Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина
РИИ АлтГТУ — Рубцовский индустриальный институт (филиал) Алтайского государственного технического университета имени И. И. Ползунова
РИРО —Рязанский институт развития образования
РУДН — Российский университет дружбы народов
СамГТУ — Самарский государственный технический университет
САФУ — Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова
СГАСУ — Самарский государственный архитектурно-строительный университет
СКФУ — Северо-Кавказский федеральный университет
СОГУ — Северо-Осетинский государственный университет имени К. Л. Хетагурова
УлГТУ — Ульяновский государственный технический университет
УрГЭУ — Уральский государственный экономический университет
Финансовый университет — Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации
ЧГУ — Чеченский государственный университет
ЮМИ — Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук
ЮНЦ РАН — Южный научный центр Российской академии наук
ЮОГУ — Юго-Осетинский государственный университет имени А. А. Тибилова
ЮФУ — Южный федеральный университет
ЯГПУ — Ярославский государственный педагогический университет имени К. Д. Ушинского

ПОРЯДКОВЫЙ АНАЛИЗ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ:

тезисы докладов
XII Международной научной конференции
(с. Цей 12–18 июля 2015 г.)

Компьютерная верстка:
М. У. Вазагаева,
И. С. Гаприндашвили
Зав. редакцией: В. В. Кибизова

ЮМИ ВНЦ РАН
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

ISBN 978-5-904695-31-6

9 785904 695316