О ВОССТАНОВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ПО НЕТОЧНО ЗАДАННОЙ ИНФОРМАЦИИ НА СФЕРАХ РАДИУСОВ R_1 И R_2

Е. А. БАЛОВА

В работах [1] и [2] было начато исследование ряда модельных задач оптимального восстановления решений уравнений математической физики на основе методов теории оптимального восстановления. При этом использовался общий подход к задачам оптимального восстановления линейных операторов по неточной информации об элементах, к которым применялись эти операторы, разработанный в работах [3] и [4]. В данной работе рассматривается задача оптимального восстановления решения задачи Дирихле в d-мерном шаре на сфере радиуса r по неточно заданным следам решения на сферах радиусов R_1 и R_2, $R_1 < r < R_2$. Задача Дирихле состоит в нахождении функции $u(\cdot)$, для которой

$$\begin{gathered} \Delta u = 0, \\ u\Big|_{\mathbb{S}^{d-1}} = f(x'), \end{gathered} \tag{1}$$

где

$$\mathbb{S}^{d-1} = \left\{\, x' = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : |x'| = 1 \,\right\}, f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}).$$

Предполгается, что известны две функции $y_1(\cdot), y_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ такие, что

$$\|u(R_j x') - y_j(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \le \delta_j, \quad j = 1, 2, \quad 0 < R_1 < R_2 \le 1.$$

Требуется по этим функциям наилучшим образом восстановить решение задачи (1) на сфере радиуса r, где $R_1 < r < R_2$. В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные отображения $\varphi\colon L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \times L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \to L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Погрешностью данного метода φ назовем величину

$$e_r(R_1, R_2, \delta_1, \delta_2, \varphi) = \sup_{\substack{f(\cdot), y_1(\cdot), y_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \\ \|u(R_j x') - y_j(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \le \delta_j,\ j=1,2}} \|u(rx') - \varphi(y_1, y_2)(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E_r(R_1, R_2, \delta_1, \delta_2) = \inf_{\varphi\colon L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \times L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \to L_2(\mathbb{S}^{d-1})} e_r(R_1, R_2, \delta_1, \delta_2, \varphi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань называется оптимальным.

В работе найдено значение $E_r(R_1, R_2, \delta_1, \delta_2)$, а также построен оптимальный метод восстановления, являющийся линейным относительно функций $y_1(\cdot)$ и $y_2(\cdot)$.

Список литературы

[1] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Тихомиров В. М.* On optimal recovery of heat equation solutions. In: Approximation Theory: A volume dedicated to B. Bojanov (D. K. Dimitrov, G. Nikolov, and R. Uluchev, Eds.), 163–175, Sofia: Marin Drinov Academic Publishing House, 2004.

[2] *Осипенко К. Ю.* О восстановлении решения задачи Дирихле по неточным исходным данным // Владикавказский мат. журн. 2004. Т. 6, вып. 4. С. 55–62.

[3] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Матем. сб. 2002. Т. 193. С. 79–100.

[4] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функ. анализ и его прил. 2003. Т. 37. С. 51–64.

МАТИ — Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского, Москва