ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2025, т. 331, с. 103–116

Об оптимальном восстановлении дробных лапласианов по неточной информации

Г. Г. Магарил-Ильяев[а,б,в], **Е. О. Сивкова**[в,г]

Поступило 16.05.2025; после доработки 06.07.2025; принято к публикации 22.08.2025

Решается задача о восстановлении дробного лапласиана на соболевском классе функций на $\mathbb{R}^d$ по приближенной информации о функциях из этого класса, заключающейся в том, что о каждой функции известно точно или приближенно ее преобразование Фурье на некотором измеримом множестве в $\mathbb{R}^d$. Построено семейство линейных оптимальных методов восстановления.

Ключевые слова: дробный лапласиан, оптимальное восстановление, экстремальная задача, преобразование Фурье.

MSC: 49N30, 42B10 **DOI:** https://doi.org/10.4213/tm4494

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Дробные лапласианы — объекты, давно известные в математической физике, но ставшие особенно популярными в последние 20 лет. Это связано, в частности, с тем, что дробный лапласиан — нелокальный объект (в отличие от производной) и поэтому, например, процессы, где в каждый момент времени нужна вся информация о функции, описываются как раз уравнениями, где вместо производных стоят дробные лапласианы.

В данной работе решается задача об оптимальном восстановлении дробного лапласиана на классе функций по приближенной информации о функциях из этого класса. Приведем точные определения.

Пусть $d \in \mathbb{N}$. Оператор Лапласа Δ на $\mathbb{R}^d$ для функции $f(\cdot)$, имеющей вторые частные производные, определяется, как известно, следующим образом:

$$\Delta f(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_d^2}.$$

Преобразование Фурье F лапласиана $\Delta f(\cdot)$ достаточно гладкой и быстро убывающей функции $f(\cdot)$ на $\mathbb{R}^d$ имеет вид

$$F[\Delta f](\xi) = -|\xi|^2 F[f](\xi) \qquad \forall\, \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d,$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^d$. Это позволяет определить дробную степень оператора Лапласа, или (кратко) дробный лапласиан.

[а] Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия.

[б] Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва, Россия.

[в] Южный математический институт — филиал Владикавказского научного центра РАН, Владикавказ, Россия.

[г] Национальный исследовательский университет “Московский энергетический институт”, Москва, Россия.

✉ georgii.magaril@math.msu.ru (Г.Г. Магарил-Ильяев), sivkova_elena@inbox.ru (Е.О. Сивкова).

Преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R}^d)$ будем обозначать той же буквой F. Справедлива теорема Планшереля, утверждающая, что для любой функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ выполнено равенство

$$\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\|F[f](\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Пусть $\alpha \geq 0$ и F — преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Для функций $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, для которых функция $\xi \mapsto |\xi|^\alpha F[f](\xi)$ также принадлежит $L_2(\mathbb{R}^d)$, обозначим через $(-\Delta)^{\alpha/2}$ оператор из $L_2(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$, действующий в образах Фурье по правилу

$$F\big[(-\Delta)^{\alpha/2}f\big](\xi) = |\xi|^\alpha F[f](\xi) \qquad \text{для п.в. } \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Назовем этот оператор $(\alpha/2)$-*й степенью оператора Лапласа.*

Пусть $\alpha > 0$. Рассмотрим следующее подпространство функций в $L_2(\mathbb{R}^d)$:

$$\mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d) = \big\{f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)\colon\ (-\Delta)^{\alpha/2}f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)\big\}$$

и положим

$$W_2^\alpha(\mathbb{R}^d) = \big\{f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)\colon\ \|(-\Delta)^{\alpha/2}f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 1\big\}.$$

Пусть, далее, $0 \leq \beta < \alpha$, A — непустое измеримое подмножество в $\mathbb{R}^d$ и $\delta \geq 0$. Мы хотим восстановить (по возможности наилучшим образом) значения оператора $(-\Delta)^{\beta/2}$ в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$ на классе $W_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$ по следующей информации: для каждой функции $f(\cdot) \in W_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$ известна функция $g(\cdot) \in L_2(A)$ такая, что

$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\|F[f](\cdot) - g(\cdot)\|_{L_2(A)} \leq \delta$$

(если $\delta = 0$, то функция $F[f](\cdot)|_A$ — сужение $F[f](\cdot)$ на A — известна точно).

Постановка задачи оптимального восстановления заключается в следующем. Любое отображение $m\colon L_2(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$ рассматривается как метод восстановления, и его погрешность определяется формулой

$$e\big((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), L_2(A), \delta, m\big) = \sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^\alpha(\mathbb{R}^d),\ g(\cdot)\in L_2(A)\\ (2\pi)^{-d/2}\|F[f](\cdot)-g(\cdot)\|_{L_2(A)}\leq\delta}} \big\|(-\Delta)^{\beta/2}f(\cdot) - m(g(\cdot))(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Если $\delta = 0$, то это выражение, очевидно, можно переписать в виде

$$e\big((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), L_2(A), 0, m\big) = \sup_{f(\cdot)\in W_2^\alpha(\mathbb{R}^d)} \big\|(-\Delta)^{\beta/2}f(\cdot) - m(F[f](\cdot)|_A)(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Нас интересуют *погрешность оптимального восстановления*, т.е. величина

$$E\big((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), L_2(A), \delta\big) = \inf_m e\big((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), L_2(A), \delta, m\big),$$

где нижняя грань берется по всем методам $m\colon L_2(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, и те методы $\widehat{m}$, на которых нижняя грань достигается, т.е.

$$E\big((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), L_2(A), \delta\big) = e\big((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), L_2(A), \delta, \widehat{m}\big).$$

Такие методы мы называем *оптимальными методами восстановления.*

Приведенная постановка задачи оптимального восстановления дробного лапласиана на классе функций $W_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$ по приближенной информации о функциях из этого класса полностью укладывается в общую постановку задачи оптимального восстановления линейных функционалов и операторов на множествах, элементы которых известны приближенно. Сама тематика оптимального восстановления стала активно развиваться с середины 60-х годов прошлого века.

Число посвященных ей статей достаточно велико. Определенный итог этой деятельности подведен в монографии [4], где приведена и обширная библиография. Отметим здесь только несколько статей, которые непосредственно связаны с данной работой. В статье [2] рассматривается та же постановка, что и выше, но в случае, когда A — выпуклое множество с непустой внутренностью, и строится один оптимальный метод. В настоящей работе множество A только лишь измеримо, находится семейство оптимальных методов, среди которых есть метод, построенный в [2], и доказывается точное неравенство для дробных лапласианов, являющееся аналогом известного неравенства Харди–Литтлвуда–Полиа для производных. В работах [5, 6] изучается подобная задача, но в случае, когда погрешность измеряется в метрике L_∞. Работа [7] посвящена оптимальному восстановлению дробных степеней разностного оператора Лапласа.

Перед формулировкой теоремы введем некоторые обозначения. Пусть $B(x,r)$ — замкнутый шар в $\mathbb{R}^d$ с центром в точке x радиуса $r\ge 0$ ($B(x,0)=x$), а $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$. Положим

$$r_A=\sup\bigl\{r\ge 0\colon \operatorname{mes}(A\cap B(0,r))=\operatorname{mes}B(0,r)\bigr\},$$

где mes — мера Лебега в $\mathbb{R}^d$.

Пусть $0<\beta<\alpha$ и $\delta>0$. Положим

$$\widehat{r}=\widehat{r}(\alpha,\beta,\delta,d)=\Bigl(\frac{\alpha}{\beta}\Bigr)^{1/(2(\alpha-\beta))}\delta^{-1/\alpha},\qquad r_0=\min\{r_A,\widehat{r}\}$$

и

$$\lambda_1=\lambda_1(\alpha,\beta,r_0)=\frac{\alpha-\beta}{\alpha}\Bigl(\frac{\beta}{\alpha}\Bigr)^{\beta/(\alpha-\beta)}r_0^{2\beta},\qquad \lambda_2=\lambda_2(\alpha,\beta,r_0)=r_0^{-2(\alpha-\beta)}.\tag{1.1}$$

Теорема. *Пусть A — измеримое множество в $\mathbb{R}^d$, $0<\beta<\alpha$ и $\delta\ge 0$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $r_A=0$, то*

$$E\bigl((-\Delta)^{\beta/2},W_2^\alpha(\mathbb{R}^d),L_2(A),\delta\bigr)=+\infty.$$

2. *Если $0<r_A<+\infty$ и $\delta=0$, то*

$$E\bigl((-\Delta)^{\beta/2},W_2^\alpha(\mathbb{R}^d),L_2(A),0\bigr)=\frac{1}{r_A^{\alpha-\beta}}.$$

При этом линейный оператор $\widehat{m}\colon L_2(A)\to L_2(\mathbb{R}^d)$, действующий для п.в. $x\in\mathbb{R}^d$ по правилу

$$\widehat{m}(F[f](\cdot)|_A)(x)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{|\xi|\le r_A}|\xi|^\beta F[f](\xi)e^{i\langle\xi,\,x\rangle}\,d\xi,$$

является оптимальным.

3. *Если $0<r_A\le+\infty$ и $\delta>0$, то*

$$E\bigl((-\Delta)^{\beta/2},W_2^\alpha(\mathbb{R}^d),L_2(A),\delta\bigr)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha}\Bigl(\dfrac{\beta}{\alpha}\Bigr)^{\beta/(\alpha-\beta)}\delta^2r_A^{2\beta}+\dfrac{1}{r_A^{2(\alpha-\beta)}}}, & r_A\le\widehat{r},\\ \delta^{(\alpha-\beta)/\alpha}, & r_A>\widehat{r}.\end{cases}$$

При этом для любой функции $a(\cdot)\in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ такой, что $a(\xi)=0$, если $\xi\notin B(0,r_0)$, и

$$\frac{|a(\xi)|^2}{\lambda_1}+\frac{\bigl||\xi|^\beta-a(\xi)\bigr|^2}{\lambda_2|\xi|^{2\alpha}}\le 1\qquad\text{для п.в. } \xi\in B(0,r_0),\tag{1.2}$$

линейный оператор $\widehat{m}_a\colon L_2(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, *действующий для п.в.* $x \in \mathbb{R}^d$ *по правилу*

$$\widehat{m}_a(g(\cdot))(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{|\xi| \le r_0} a(\xi)\, g(\xi)\, e^{i\langle \xi,\, x\rangle}\, d\xi,$$

является оптимальным методом.

В качестве первого следствия этой теоремы укажем серию оптимальных методов, имеющих явное описание.

Следствие 1. *Для каждого* r *такого, что*

$$0 \le r \le \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/(2\beta)} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/(2(\alpha-\beta))} r_0,$$

линейный оператор $\widehat{m}_r\colon L_2(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, *действующий для п.в.* $x \in \mathbb{R}^d$ *по правилу*

$$\widehat{m}_r(g(\cdot))(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{|\xi| \le r} |\xi|^\beta g(\xi)\, e^{i\langle \xi,\, x\rangle}\, d\xi +$$
$$+ \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{r \le |\xi| \le r_0} |\xi|^\beta \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha - \beta}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\beta/(\alpha-\beta)} \left(\frac{|\xi|}{r_0}\right)^{2\alpha}\right)^{-1} g(\xi)\, e^{i\langle \xi,\, x\rangle}\, d\xi,$$

является оптимальным методом.

Следствие 2. *Пусть* $\alpha > 0$ *и* $r_A \ge \widehat{r}$. *Тогда для всех функций* $f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$ *справедливо точное неравенство*

$$\left\|(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \left(\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \|F[f](\cdot)\|_{L_2(A)}\right)^{1-\beta/\alpha} \left\|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)\right\|^{\beta/\alpha}_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.3}$$

Если $r_A = +\infty$, *то оно равносильно следующему точному неравенству*:

$$\left\|(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \|f(\cdot)\|^{1-\beta/\alpha}_{L_2(\mathbb{R}^d)} \left\|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)\right\|^{\beta/\alpha}_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.4}$$

Сделаем несколько замечаний по поводу сформулированной теоремы и ее следствий.

Утверждение 1 теоремы означает, что, каково бы ни было множество, на котором известно преобразование Фурье функций из данного класса, восстановить значения оператора невозможно, если в это множество нельзя вписать (в указанном выше смысле) никакой шар с центром в нуле.

Утверждение 2 говорит о том, что если $0 < r_A < +\infty$ и $\delta = 0$, то для оптимального восстановления значений оператора достаточно знать преобразования Фурье функций из данного класса только на вписанном в множество A шаре $B(0, r_A)$ и чем больше этот шар, тем погрешность оптимального восстановления меньше. Сам оптимальный метод есть $(\beta/2)$-я степень оператора Лапласа функции, преобразование Фурье которой равно нулю вне шара $B(0, r_A)$.

Утверждение 3 наиболее интересно. Если $0 < r_A \le +\infty$ и $\delta > 0$, то снова преобразование Фурье достаточно знать только на шаре $B(0, r_A)$ и погрешность оптимального восстановления уменьшается с ростом радиуса шара, но только до величины $\widehat{r}$. Далее эта погрешность стабилизируется и информация о преобразовании Фурье за пределами шара $B(0, \widehat{r})$ становится лишней (рис. 1).

Другими словами, если нарушается соотношение $r_A \le \widehat{r}$, т.е.

$$r_A\, \delta^{1/\alpha} \le \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/(2(\alpha-\beta))},$$

между погрешностью задания исходных данных и радиусом шара r_A, то доступная информация о преобразовании Фурье функций оказывается излишней.

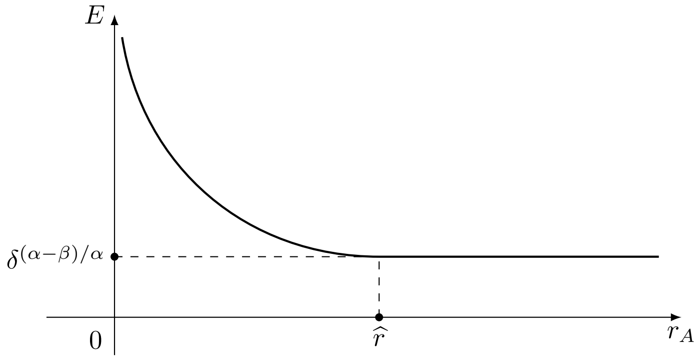

Рис. 1. Погрешность оптимального восстановления оператора в зависимости от радиуса r_A шара, “вписанного” в A

Оптимальный метод в данном случае — это обратное преобразование Фурье от “сглаженной” наблюдаемой информации о преобразовании Фурье на шаре $B(0,r_0)$.

В следствии 1 если $r>0$, то на шаре $B(0,r)$ информация “не обрабатывается” (подставляется то, что наблюдается), а на шаровом слое $\{\xi\colon r<|\xi|\le r_0\}$ наблюдаемая информация “сглаживается”. Сам оптимальный метод, как и в теореме, есть $(\beta/2)$-я степень оператора Лапласа функции, преобразование Фурье которой совпадает с наблюдаемой функцией $g(\cdot)$ на шаре $B(0,r)$ и со сглаженным наблюдением на слое $\{\xi\colon r<|\xi|\le r_0\}$.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ И ЕЕ СЛЕДСТВИЙ

Доказательство теоремы. Начнем с общей оценки снизу величины погрешности оптимального восстановления. Рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$\begin{gathered}\big\|(-\Delta)^{\beta/2}f(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\to\max,\\ \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\|F[f](\cdot)\|_{L_2(A)}\le\delta,\qquad \big\|(-\Delta)^{\alpha/2}f(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\le 1,\qquad f(\cdot)\in\mathcal{W}_2^{\alpha}(\mathbb{R}^d).\end{gathered}\tag{2.1}$$

Обозначим через $S(\beta,\alpha,A,\delta)$ значение этой задачи, т.е. точную верхнюю грань максимизируемого функционала при данных ограничениях (если $\delta=0$, то первое ограничение имеет вид $F[f](\xi)=0$ для п.в. $\xi\in A$).

Докажем, что

$$E\big((-\Delta)^{\beta/2},W_2^{\alpha}(\mathbb{R}^d),L_2(A),\delta\big)\ge S(\beta,\alpha,A,\delta).\tag{2.2}$$

Действительно, пусть $f_0(\cdot)$ — допустимая функция в (2.1) (т.е. $f_0(\cdot)$ удовлетворяет ограничениям задачи). Тогда, очевидно, функция $-f_0(\cdot)$ также допустима и для любого отображения $m\colon L_2(A)\to L_2(\mathbb{R}^d)$ ($m(0)(\cdot)$ — значение отображения m на нулевой функции) имеем

$$\begin{aligned}2\big\|(-\Delta)^{\beta/2}f_0(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}&\le\big\|(-\Delta)^{\beta/2}f_0(\cdot)-m(0)(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\big\|(-\Delta)^{\beta/2}(-f_0)(\cdot)-m(0)(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\le\\ &\le 2\sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^{\alpha}(\mathbb{R}^d)\\ (2\pi)^{-d/2}\|Ff(\cdot)\|_{L_2(A)}\le\delta}}\big\|(-\Delta)^{\beta/2}f(\cdot)-m(0)(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\le\\ &\le 2\sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^{\alpha}(\mathbb{R}^d),\ g(\cdot)\in L_2(A)\\ (2\pi)^{-d/2}\|Ff(\cdot)-g(\cdot)\|_{L_2(A)}\le\delta}}\big\|(-\Delta)^{\beta/2}f(\cdot)-m(g(\cdot))(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}=\\ &=2e\big((-\Delta)^{\beta/2},W_2^{\alpha}(\mathbb{R}^d),L_2(A),\delta,m\big).\end{aligned}$$

Переходя слева к верхней грани по всем допустимым функциям в задаче (2.1), а затем справа к нижней грани по всем методам m, получаем неравенство (2.2).

Согласно теореме Планшереля и определению дробной степени оператора Лапласа квадрат значения задачи (2.1) в образах Фурье равен значению такой задачи:

$$\begin{gathered}\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\beta}|F[f](\xi)|^2\,d\xi\to\max,\\ \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{A}|F[f](\xi)|^2\,d\xi\le\delta^2,\qquad \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\alpha}|F[f](\xi)|^2\,d\xi\le 1,\qquad f(\cdot)\in\mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d).\end{gathered}\tag{2.3}$$

1. Докажем утверждение 1 теоремы, т.е. то, что если $r_A=0$, то

$$E\big((-\Delta)^{\beta/2},W_2^\alpha(\mathbb{R}^d),L_2(A),\delta\big)=+\infty.$$

Для этого в силу оценки (2.2) достаточно показать, что значение задачи (2.3) равно $+\infty$.

Действительно, если $r_A=0$, то $\operatorname{mes}(A\cap B(0,\varepsilon))<\operatorname{mes}B(0,\varepsilon)$ для любого $\varepsilon>0$ и, значит, мера множества $\Omega_\varepsilon=B(0,\varepsilon)\setminus A$ положительна. Положим

$$\varphi_\varepsilon(\xi)=\begin{cases}(2\pi)^{d/2}\left(\int\limits_{\Omega_\varepsilon}|x|^{2\alpha}\,dx\right)^{-1/2}, & \xi\in\Omega_\varepsilon,\\ 0, & \xi\notin\Omega_\varepsilon.\end{cases}$$

Ясно, что $\varphi_\varepsilon(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d)$. Покажем, что функции $f_\varepsilon(\cdot)=F^{-1}[\varphi_\varepsilon](\cdot)$, где F^{-1} — обратное преобразование Фурье, допустимы в задаче (2.3).

Действительно, $F[f_\varepsilon](\cdot)=\varphi_\varepsilon(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d)$ и ясно, что функция $\xi\mapsto|\xi|^\alpha F[f_\varepsilon](\xi)$ также принадлежит $L_2(\mathbb{R}^d)$. Следовательно, $(-\Delta)^{\alpha/2}f_\varepsilon(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d)$, и поэтому $f_\varepsilon(\cdot)\in\mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$. Далее,

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{A}|F[f_\varepsilon](\xi)|^2\,d\xi=0\le\delta^2$$

и

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\alpha}|F[f_\varepsilon](\xi)|^2\,d\xi=\frac{\int_{\Omega_\varepsilon}|\xi|^{2\alpha}\,d\xi}{\int_{\Omega_\varepsilon}|x|^{2\alpha}\,dx}=1,$$

т.е. функции $f_\varepsilon(\cdot)$ допустимы в задаче (2.3) для всех $\varepsilon>0$.

Оценим значение максимизируемого функционала в этой задаче. При $\xi\in\Omega_\varepsilon\setminus\{0\}$ имеем $|\xi|^{-2(\alpha-\beta)}\ge\varepsilon^{-2(\alpha-\beta)}$; следовательно,

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\beta}|Ff_\varepsilon(\xi)|^2\,d\xi=\frac{\int_{\Omega_\varepsilon}|\xi|^{2\beta}\,d\xi}{\int_{\Omega_\varepsilon}|x|^{2\alpha}\,dx}=\frac{\int_{\Omega_\varepsilon\setminus\{0\}}|\xi|^{2\alpha}|\xi|^{-2(\alpha-\beta)}\,d\xi}{\int_{\Omega_\varepsilon\setminus\{0\}}|x|^{2\alpha}\,dx}\ge\varepsilon^{-2(\alpha-\beta)},$$

откуда в силу произвольности ε следует, что значение задачи (2.3) равно $+\infty$, и тем самым утверждение 1 теоремы доказано.

2. Докажем утверждение 2 теоремы. Получим сначала нужную оценку снизу для погрешности оптимального восстановления в ситуации, когда $0<r_A<+\infty$ и $\delta=0$.

Как показано выше, квадрат погрешности оптимального восстановления не меньше значения задачи (2.3). Поскольку $\delta = 0$, первое ограничение в этой задаче означает, что $F[f](\xi) = 0$ для п.в. $\xi \in A$, и тогда сама задача (2.3) переписывается в этом случае так:

$$\begin{gathered}\frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus A} |\xi|^{2\beta} |F[f](\xi)|^2 \, d\xi \to \max, \\ \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus A} |\xi|^{2\alpha} |F[f](\xi)|^2 \, d\xi \le 1, \qquad f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d).\end{gathered} \tag{2.4}$$

На эту задачу можно смотреть как на задачу (бесконечномерного) линейного программирования, переменными которой являются положительные меры вида

$$\mu_f(E) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_E |F[f](\xi)|^2 \, d\xi, \qquad f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d),$$

где E пробегает множество Σ всех измеримых по Лебегу множеств в $\mathbb{R}^d$. Тогда задача (2.4) запишется следующим образом:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus A} |\xi|^{2\beta} \, d\mu_f(\xi) \to \max, \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus A} |\xi|^{2\alpha} \, d\mu_f(\xi) \le 1, \qquad f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d).$$

Удобно рассмотреть более общую постановку на линейном пространстве всех вещественных конечных мер на Σ:

$$\int\limits_{(\mathbb{R}^d \setminus A) \cup \{\xi_0\}} |\xi|^{2\beta} \, d\mu(\xi) \to \max, \qquad \int\limits_{(\mathbb{R}^d \setminus A) \cup \{\xi_0\}} |\xi|^{2\alpha} \, d\mu(\xi) \le 1, \qquad d\mu(\cdot) \ge 0, \tag{2.5}$$

где $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$ таково, что $|\xi_0| = r_A$. Значение этой задачи, очевидно, не меньше значения задачи (2.4). Мы найдем решение данной задачи и тем самым ее значение, а затем покажем, что оно равно значению задачи (2.4).

Задаче (2.5) поставим в соответствие следующую функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot), \lambda) = -\int\limits_{(\mathbb{R}^d \setminus A) \cup \{\xi_0\}} |\xi|^{2\beta} \, d\mu(\xi) + \lambda \int\limits_{(\mathbb{R}^d \setminus A) \cup \{\xi_0\}} |\xi|^{2\alpha} \, d\mu(\xi),$$

где число λ называется множителем Лагранжа. Если найдутся допустимая в задаче (2.5) мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ и множитель Лагранжа $\widehat{\lambda} \ge 0$ такие, что

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot), \widehat{\lambda}) \ge \mathcal{L}(d\widehat{\mu}(\cdot), \widehat{\lambda}) \qquad \text{для всех} \quad d\mu(\cdot) \ge 0 \tag{2.6}$$

и

$$\widehat{\lambda} \left(\int\limits_{(\mathbb{R}^d \setminus A) \cup \{\xi_0\}} |\xi|^{2\alpha} \, d\widehat{\mu}(\xi) - 1 \right) = 0, \tag{2.7}$$

то согласно достаточным условиям в теореме Каруша–Куна–Таккера (см. [3]) мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ будет решением задачи (2.5) (впрочем, непосредственная проверка этого факта вполне элементарна).

Предъявим теперь допустимую в задаче (2.5) меру $d\widehat{\mu}(\cdot)$ и множитель Лагранжа $\widehat{\lambda} \ge 0$, для которых выполнены условия (2.6) и (2.7).

Положим

$$d\widehat{\mu}(\cdot) = r_A^{-2\alpha} \, \delta(\cdot - \xi_0),$$

где $\delta(\,\cdot - \xi_0)$ — это δ-функция Дирака, сосредоточенная в точке ξ_0. Ясно, что $d\widehat{\mu}(\cdot)$ — положительная мера и что

$$\int\limits_{(\mathbb{R}^d\setminus A)\cup\{\xi_0\}} |\xi|^{2\alpha}\,d\widehat{\mu}(\xi) = r_A^{-2\alpha}|\xi_0|^{2\alpha} = 1,$$

т.е. мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ допустима в задаче (2.5) и выполнено условие (2.7).

Положим теперь $\widehat{\lambda} = r_A^{-2(\alpha-\beta)}$ и проверим справедливость условия (2.6). Функция

$$g(\xi) = -|\xi|^{2\beta} + \widehat{\lambda}|\xi|^{2\alpha} = |\xi|^{2\beta}\bigl(-1 + r_A^{-2(\alpha-\beta)}|\xi|^{2(\alpha-\beta)}\bigr)$$

в точке ξ_0 обращается в нуль и неотрицательна для п.в. $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus A$, поскольку в силу определения r_A имеем $|\xi| \ge r_A$ для п.в. $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus A$.

Следовательно, для любой положительной меры $d\mu(\cdot)$

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot),\widehat{\lambda}) = \int\limits_{(\mathbb{R}^d\setminus A)\cup\{\xi_0\}} \bigl(-|\xi|^{2\beta} + \widehat{\lambda}|\xi|^{2\alpha}\bigr)\,d\mu(\xi) \ge 0,$$

а $\mathcal{L}(d\widehat{\mu}(\cdot),\widehat{\lambda}) = 0$, и поэтому условие (2.6) выполнено.

Итак, мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ есть решение задачи (2.5) и, стало быть, ее значение равно

$$\int\limits_{(\mathbb{R}^d\setminus A)\cup\{\xi_0\}} |\xi|^{2\beta}\,d\widehat{\mu}(\xi) = r_A^{-2\alpha}|\xi_0|^{2\beta} = r_A^{-2(\alpha-\beta)}.$$

Покажем, что оно совпадает со значением задачи (2.4). Для этого построим δ-образную последовательность допустимых функций в задаче (2.4) (аппроксимирующую меру $d\widehat{\mu}(\cdot)$), на которой максимизируемый функционал сходится к $r_A^{-2(\alpha-\beta)}$.

В силу определения r_A для каждого $k \in \mathbb{N}$ множество

$$\Omega_k = B\biggl(0, r_A + \frac{1}{k}\biggr) \setminus A \tag{2.8}$$

имеет ненулевую меру. Рассмотрим последовательность функций $\varphi_k(\cdot)$, определенных формулой

$$\varphi_k(\xi) = \begin{cases} \dfrac{(2\pi)^{d/2}}{(r_A + 1/k)^{\alpha}\sqrt{\operatorname{mes}\Omega_k}}, & \xi \in \Omega_k, \\ 0, & \xi \notin \Omega_k. \end{cases}$$

Ясно, что $\varphi_k(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Положим $f_k(\cdot) = F^{-1}[\varphi_k](\cdot)$ и покажем, что эти функции допустимы в задаче (2.4).

Как и раньше (см. п. 1), проверяется, что они принадлежат $\mathcal{W}_2^{\alpha}(\mathbb{R}^d)$. Далее,

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_A |F[f_k](\xi)|^2\,d\xi = 0 \le \delta^2$$

и

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus A} |\xi|^{2\alpha}|F[f_k](\xi)|^2\,d\xi = \frac{1}{(r_A + 1/k)^{2\alpha}\operatorname{mes}\Omega_k}\int\limits_{\Omega_k}|\xi|^{2\alpha}\,d\xi \le \frac{(r_A + 1/k)^{2\alpha}}{(r_A + 1/k)^{2\alpha}\operatorname{mes}\Omega_k}\int\limits_{\Omega_k} d\xi = 1.$$

Таким образом, функции $f_k(\cdot)$ допустимы в задаче (2.4).

Оценим значение максимизируемого функционала в этой задаче на этих функциях. Легко видеть, что $|\xi| \geq r_A$ для п.в. $\xi \in \Omega_k$, поэтому

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus A} |\xi|^{2\beta} |F[f_k](\xi)|^2 \, d\xi = \frac{1}{(r_A + 1/k)^{2\alpha} \operatorname{mes} \Omega_k} \int\limits_{\Omega_k} |\xi|^{2\beta} \, d\xi \geq$$

$$\geq \frac{r_A^{2\beta}}{(r_A + 1/k)^{2\alpha} \operatorname{mes} \Omega_k} \int\limits_{\Omega_k} d\xi = \frac{r_A^{2\beta}}{(r_A + 1/k)^{2\alpha}}.$$

Величина справа, очевидно, стремится к $r_A^{-2(\alpha-\beta)}$ (к значению задачи (2.5)). Отсюда следует, что значение задачи (2.4) не меньше значения задачи (2.5). Но поскольку, как было отмечено, значение задачи (2.4) не больше значения задачи (2.5), эти значения на самом деле совпадают.

Таким образом, в силу (2.2) в случае $\delta = 0$ справедлива оценка

$$E\big((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), L_2(A), 0\big) \geq r_A^{-(\alpha-\beta)}. \tag{2.9}$$

Перейдем к доказательству оценки сверху для погрешности оптимального восстановления и оптимальности указанного в утверждении 2 теоремы метода $\widehat{m}$.

Оценим погрешность этого метода, равную, по определению, значению следующей задачи:

$$\big\|(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot) - \widehat{m}(F[f](\cdot)|_A)(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \max,$$

$$\big\|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 1, \qquad f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d).$$

Переходя по теореме Планшереля к образам Фурье в этой задаче, получим, что квадрат ее значения равен значению задачи

$$\begin{gathered} \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \big||\xi|^\beta F[f](\xi) - |\xi|^\beta F[f](\xi)|_{B(0,\,r_A)}\big|^2 \, d\xi \to \max, \\ \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |F[f](\xi)|^2 \, d\xi \leq 1, \qquad f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d), \end{gathered} \tag{2.10}$$

где $F[f](\xi)|_{B(0,\,r_A)}$ — сужение преобразования Фурье функции f на шар $B(0, r_A)$.

Оценим сверху максимизируемый функционал в (2.10):

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta} \big|F[f](\xi) - F[f](\xi)|_{B(0,\,r_A)}\big|^2 \, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,\,r_A)} |\xi|^{2\beta} |F[f](\xi)|^2 \, d\xi =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,\,r_A)} |\xi|^{-2(\alpha-\beta)} |\xi|^{2\alpha} |F[f](\xi)|^2 \, d\xi \leq$$

$$\leq r_A^{-2(\alpha-\beta)} \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |F[f](\xi)|^2 \, d\xi \leq r_A^{-2(\alpha-\beta)}.$$

Отсюда следует, что

$$e\big((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), L_2(A), 0, \widehat{m}\big) \leq r_A^{-(\alpha-\beta)}.$$

Учитывая это неравенство и оценку (2.9), получаем

$$r_A^{-(\alpha-\beta)} \leq E\big((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), L_2(A), 0\big) \leq e\big((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), L_2(A), 0, \widehat{m}\big) \leq r_A^{-(\alpha-\beta)}. \tag{2.11}$$

Этим доказаны нужное выражение для погрешности оптимального восстановления и оптимальность метода $\widehat{m}$.

3. Докажем утверждение 3 теоремы. Как и раньше, начинаем с оценки снизу величины $E((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), L_2(A), \delta)$.

Пусть сначала $r_A > \widehat{r}$. Введем множество

$$B_k = \left\{\xi \in \mathbb{R}^d\colon\ \delta^{-1/\alpha} - \frac{1}{k} \le |\xi| \le \delta^{-1/\alpha},\ k \in \mathbb{N}\right\}.$$

Очевидно, что $\delta^{-1/\alpha} - 1/k > 0$ для достаточно больших k, а также что $\delta^{-1/\alpha} < \widehat{r} < r_A$ и, значит, $B_k \ne \varnothing$ и $\operatorname{mes}(B_k \cap A) = \operatorname{mes} B_k$.

Для всех таких k рассмотрим последовательность функций $\psi_k(\cdot)$, определенных формулой

$$\psi_k(\xi) = \begin{cases} \dfrac{(2\pi)^{d/2}\delta}{\sqrt{\operatorname{mes} B_k}}, & \xi \in B_k, \\ 0, & \xi \notin B_k. \end{cases}$$

Ясно, что $\psi_k(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Положим $g_k(\cdot) = F^{-1}[\psi_k](\cdot)$ и покажем, что эти функции допустимы в задаче (2.3). Как и раньше (см. п. 1), проверяется, что они принадлежат $\mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$. Далее,

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_A |F[g_k](\xi)|^2\,d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{B_k\cap A} \frac{(2\pi)^d\delta^2}{\operatorname{mes} B_k}\,d\xi = \delta^2$$

и

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha}|F[g_k](\xi)|^2\,d\xi = \frac{\delta^2}{\operatorname{mes} B_k}\int\limits_{B_k}|\xi|^{2\alpha}\,d\xi \le \frac{\delta^2(\delta^{-1/\alpha})^{2\alpha}}{\operatorname{mes} B_k}\int\limits_{B_k} d\xi = 1.$$

Таким образом, функции $g_k(\cdot)$ допустимы в задаче (2.3).

Оценим значение максимизируемого функционала в этой задаче на этих функциях:

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta}|F[g_k](\xi)|^2\,d\xi = \frac{\delta^2}{\operatorname{mes} B_k}\int\limits_{B_k}|\xi|^{2\beta}\,d\xi \ge \frac{\delta^2(\delta^{-1/\alpha} - 1/k)^{2\beta}}{\operatorname{mes} B_k}\int\limits_{B_k} d\xi = \delta^2\left(\delta^{-1/\alpha} - \frac{1}{k}\right)^{2\beta}.$$

Ясно, что выражение справа стремится к величине $\delta^{2(\alpha-\beta)/\alpha}$. Отсюда следует, что значение задачи (2.3) не меньше этой величины, и тем самым в силу (2.2)

$$E\big((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), L_2(A), \delta\big) \ge \delta^{(\alpha-\beta)/\alpha}. \tag{2.12}$$

Пусть теперь $r_A \le \widehat{r}$. Введем множество

$$C_k = \left\{\xi \in \mathbb{R}^d\colon\ \frac{r_A}{\widehat{r}}\,\delta^{-1/\alpha} - \frac{1}{k} \le |\xi| \le \frac{r_A}{\widehat{r}}\,\delta^{-1/\alpha},\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Очевидно, что $(r_A/\widehat{r})\delta^{-1/\alpha} - 1/k > 0$ для достаточно больших k, а также что $(r_A/\widehat{r})\delta^{-1/\alpha} < r_A \le \widehat{r}$ и, значит, $C_k \ne \varnothing$ и $\operatorname{mes}(C_k \cap A) = \operatorname{mes} C_k$.

Рассмотрим последовательность функций $\eta_k(\cdot)$, определенных формулой

$$\eta_k(\xi) = \begin{cases} K_1(k), & \xi \in C_k \cap A, \\ K_2(k), & \xi \in \Omega_k, \\ 0 & \text{в противном случае}, \end{cases}$$

где Ω_k — множества, определенные в (2.8),

$$K_1^2(k) = \frac{(2\pi)^d\,\delta^2}{\operatorname{mes} C_k}, \qquad K_2^2(k) = \frac{(2\pi)^d(1-(r_A/\widehat{r}\,)^{2\alpha})}{(r_A+1/k)^{2\alpha}\operatorname{mes}\Omega_k}.$$

Ясно, что $\eta_k(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Положим $h_k(\cdot) = F^{-1}[\eta_k](\cdot)$. Как и раньше, легко проверяется, что функции $h_k(\cdot)$ допустимы в задаче (2.3): $h_k(\cdot) \in \mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$ при всех $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_A |F[h_k](\xi)|^2\,d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{C_k\cap A}\frac{(2\pi)^d\delta^2}{\operatorname{mes} C_k}\,d\xi = \delta^2$$

и

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\alpha}|F[h_k](\xi)|^2\,d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d}\left(\int\limits_{C_k\cap A}K_1^2(k)|\xi|^{2\alpha}\,d\xi + \int\limits_{\Omega_k}K_2^2(k)|\xi|^{2\alpha}\,d\xi\right) \le$$

$$\le \delta^2\left(\frac{r_A}{\widehat{r}}\right)^{2\alpha}\delta^{-2} + \frac{1-(r_A/\widehat{r}\,)^{2\alpha}}{(r_A+1/k)^{2\alpha}}\left(r_A+\frac{1}{k}\right)^{2\alpha} = 1.$$

Оценим значение максимизируемого функционала в задаче (2.3) на этих функциях:

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\beta}|F[h_k](\xi)|^2\,d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d}\left(K_1^2(k)\int\limits_{C_k\cap A}|\xi|^{2\beta}\,d\xi + K_2^2(k)\int\limits_{\Omega_k}|\xi|^{2\beta}\,d\xi\right) \ge$$

$$\ge \frac{K_1^2(k)((r_A/\widehat{r}\,)\delta^{-1/\alpha}-1/k)^{2\beta}\operatorname{mes} C_k}{(2\pi)^d} + \frac{K_2^2(k)\,r_A^{2\beta}\operatorname{mes}\Omega_k}{(2\pi)^d} =$$

$$= \delta^2\left(\frac{r_A}{\widehat{r}}\,\delta^{-1/\alpha} - \frac{1}{k}\right)^{2\beta} + \frac{(1-(r_A/\widehat{r}\,)^{2\alpha})}{(r_A+1/k)^{2\alpha}}\,r_A^{2\beta}.$$

Ясно, что величина справа стремится к

$$\delta^2\left(\frac{r_A}{\widehat{r}}\,\delta^{-1/\alpha}\right)^{2\beta} + \frac{1-(r_A/\widehat{r}\,)^{2\alpha}}{r_A^{2\alpha}}\,r_A^{2\beta} = \delta^2 r_A^{2\beta}\left(\frac{\delta^{-1/\alpha}}{\widehat{r}}\right)^{2\beta} - \frac{r_A^{2\beta}}{\widehat{r}^{\,2\alpha}} + \frac{1}{r_A^{2(\alpha-\beta)}} =$$

$$= \frac{\alpha-\beta}{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\beta/(\alpha-\beta)}\delta^2 r_A^{2\beta} + \frac{1}{r_A^{2(\alpha-\beta)}}.$$

Отсюда следует, что значение задачи (2.3) не меньше этой величины. Вместе с (2.2) это приводит к неравенству

$$E\big((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), L_2(A), \delta\big) \ge \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\beta/(\alpha-\beta)}\delta^2 r_A^{2\beta} + \frac{1}{r_A^{2(\alpha-\beta)}}}. \tag{2.13}$$

Таким образом, из (2.12) и (2.13) следует нужная оценка снизу для погрешности оптимального восстановления в утверждении 3 теоремы.

Перейдем к доказательству оценки сверху погрешности оптимального восстановления в случаях, когда $r_A > \widehat{r}$ и $r_A \le \widehat{r}$, и к доказательству оптимальности указанных в утверждении 3 теоремы методов.

Покажем сначала, что множество функций $a(\cdot)$, удовлетворяющих условиям теоремы, непусто.

Пусть λ_1 и λ_2 — числа, определенные в (1.1). Заметим, что для этих чисел функция

$$g(\xi)=-|\xi|^{2\beta}+\lambda_1+\lambda_2|\xi|^{2\alpha},\qquad \xi\in\mathbb{R}^d,$$

неотрицательна на $\mathbb{R}^d$. Это сразу следует из неотрицательности функции

$$h(t)=-t^{2\beta}+\lambda_1+\lambda_2t^{2\alpha},\qquad t\in\mathbb{R}_+,$$

проверка которой элементарна.

Обозначим через $S_a(\cdot)$ левую часть неравенства (1.2) из утверждения 3 теоремы. Выделяя полный квадрат в $S_a(\cdot)$, нетрудно убедиться, что условие $S_a(\xi)\le 1$ для п.в. $\xi\in B(0,r_0)$ равносильно соотношению

$$\left|a(\xi)-\frac{\lambda_1|\xi|^\beta}{\lambda_1+\lambda_2|\xi|^{2\alpha}}\right|\le\frac{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\,|\xi|^\alpha}{\lambda_1+\lambda_2|\xi|^{2\alpha}}\sqrt{-|\xi|^{2\beta}+\lambda_1+\lambda_2|\xi|^{2\alpha}}.\tag{2.14}$$

Из этого соотношения, очевидно, следует, что множество указанных функций $a(\cdot)$ непусто.

Пусть $a(\cdot)$ — функция из этого множества. Докажем оптимальность метода $\widehat{m}_a$, определенного в теореме. Оценим его погрешность, которая по определению равна значению задачи

$$\begin{gathered}\big\|(-\Delta)^{\beta/2}f(\cdot)-\widehat{m}_a(g(\cdot))(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\to\max,\\ \|F[f](\cdot)-g(\cdot)\|_{L_2(A)}\le\delta,\qquad \big\|(-\Delta)^{\alpha/2}f(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R})}\le 1,\\ g(\cdot)\in L_2(A),\qquad f(\cdot)\in\mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d).\end{gathered}\tag{2.15}$$

В образах Фурье согласно теореме Планшереля и по определению дробной степени оператора Лапласа квадрат значения этой задачи равен значению задачи

$$\begin{gathered}\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\big||\xi|^\beta F[f](\xi)-a(\xi)g_A(\xi)\big|^2\,d\xi\to\max,\\ \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_A|F[f](\xi)-g(\xi)|^2\,d\xi\le\delta^2,\qquad \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\alpha}|F[f](\xi)|^2\,d\xi\le 1,\\ g(\cdot)\in L_2(A),\qquad f(\cdot)\in\mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d),\end{gathered}\tag{2.16}$$

где $g_A(\cdot)$ — функция, равная $g(\cdot)$ на A и нулю вне A.

Оценим по неравенству Коши–Буняковского для $0<|\xi|\le r_0$ выражение под знаком интеграла в максимизируемом функционале:

$$\begin{aligned}\big||\xi|^\beta F[f](\xi)-a(\xi)g_A(\xi)\big|^2&=\big|a(\xi)(F[f](\xi)-g_A(\xi))+(|\xi|^\beta-a(\xi))F[f](\xi)\big|^2=\\ &=\left|\frac{a(\xi)}{\sqrt{\lambda_1}}\sqrt{\lambda_1}(F[f](\xi)-g_A(\xi))+\frac{|\xi|^\beta-a(\xi)}{\sqrt{\lambda_2}\,|\xi|^\alpha}\sqrt{\lambda_2}\,|\xi|^\alpha F[f](\xi)\right|^2\le\\ &\le\left(\frac{|a(\xi)|^2}{\lambda_1}+\frac{\big||\xi|^\beta-a(\xi)\big|^2}{\lambda_2|\xi|^{2\alpha}}\right)\big(\lambda_1|F[f](\xi)-g_A(\xi)|^2+\lambda_2|\xi|^{2\alpha}|F[f](\xi)|^2\big)=\\ &=S_a(\xi)\big(\lambda_1|F[f](\xi)-g_A(\xi)|^2+\lambda_2|\xi|^{2\alpha}|F[f](\xi)|^2\big).\end{aligned}\tag{2.17}$$

Проинтегрируем это неравенство. Сначала сделаем это по шару $B(0,r_0)$, учитывая первое ограничение в (2.16) и то, что $S_a(\xi)\le 1$ для п.в. $\xi\in B(0,r_0)$:

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{|\xi|\le r_0}\bigl||\xi|^\beta Ff(\xi)-a(\xi)g_A(\xi)\bigr|^2\,d\xi\le$$

$$\le\lambda_1\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{|\xi|\le r_0}|F[f](\xi)-g_A(\xi)|^2\,d\xi+\lambda_2\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{|\xi|\le r_0}|\xi|^{2\alpha}|F[f](\xi)|^2\,d\xi\le$$

$$\le\lambda_1\delta^2+\lambda_2\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{|\xi|\le r_0}|\xi|^{2\alpha}|F[f](\xi)|^2\,d\xi.$$

Теперь проинтегрируем неравенство (2.17) по дополнению к $B(0,r_0)$, учитывая, что функция $a(\cdot)$ на этом множестве равна нулю:

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{|\xi|>r_0}\bigl||\xi|^\beta F[f](\xi)-a(\xi)g_A(\xi)\bigr|^2\,d\xi=\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{|\xi|>r_0}|\xi|^{2\beta}|F[f](\xi)|^2\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{|\xi|>r_0}|\xi|^{-2(\alpha-\beta)}|\xi|^{2\alpha}|F[f](\xi)|^2\,d\xi\le$$

$$\le r_0^{-2(\alpha-\beta)}\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{|\xi|>r_0}|\xi|^{2\alpha}|F[f](\xi)|^2\,d\xi=$$

$$=\lambda_2\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{|\xi|>r_0}|\xi|^{2\alpha}|F[f](\xi)|^2\,d\xi.$$

Складывая полученные оценки и учитывая второе ограничение в (2.16), приходим к неравенству

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\bigl||\xi|^\beta F[f](\xi)-a(\xi)g_A(\xi)\bigr|^2\,d\xi\le\lambda_1\delta^2+\lambda_2. \tag{2.18}$$

Если $r_A>\widehat{r}$, то $r_0=\widehat{r}$. Тогда из определений величин $\widehat{r}$, λ_1 и λ_2 следует, что правая часть в (2.18) равна $\delta^{2(\alpha-\beta)/\alpha}$ и, значит,

$$e\bigl((-\Delta)^{\beta/2},W_2^\alpha(\mathbb{R}^d),L_2(A),\delta,\widehat{m}_a\bigr)\le\delta^{(\alpha-\beta)/\alpha}.$$

Если же $r_A\le\widehat{r}$, то $r_0=r_A$ и в этом случае правая часть (2.18) имеет вид

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\beta/(\alpha-\beta)}\delta^2r_A^{2\beta}+\frac{1}{r_A^{2(\alpha-\beta)}}$$

и тем самым

$$e\bigl((-\Delta)^{\beta/2},W_2^\alpha(\mathbb{R}^d),L_2(A),\delta,\widehat{m}_a\bigr)\le\frac{\alpha-\beta}{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\beta/(\alpha-\beta)}\delta^2r_A^{2\beta}+\frac{1}{r_A^{2(\alpha-\beta)}}.$$

Вместе с оценками (2.12) и (2.13) это означает, что для данной функции $a(\cdot)$ метод $\widehat{m}_a$ оптимален и справедливо выражение для погрешности оптимального восстановления, указанное в теореме. Теорема доказана. □

Доказательство следствия 1. Из (2.14) следует, что метод $\widehat{m}_{a_0}$, где

$$a_0(\xi)=\frac{\lambda_1|\xi|^\beta}{\lambda_1+\lambda_2|\xi|^{2\alpha}},$$

является оптимальным. Подставляя сюда выражения для λ_1 и λ_2 из (1.1), получаем

$$a_0(\xi) = \frac{\lambda_1|\xi|^\beta}{\lambda_1 + \lambda_2|\xi|^{2\alpha}} = \frac{((\alpha-\beta)/\alpha)(\beta/\alpha)^{\beta/(\alpha-\beta)} r_0^{2\beta}|\xi|^\beta}{((\alpha-\beta)/\alpha)(\beta/\alpha)^{\beta/(\alpha-\beta)} r_0^{2\beta} + r_0^{-2(\alpha-\beta)}|\xi|^{2\alpha}} =$$
$$= |\xi|^\beta\left(1 + \frac{\alpha}{\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\beta/(\alpha-\beta)}\left(\frac{|\xi|}{r_0}\right)^{2\alpha}\right)^{-1},$$

и, значит, метод в следствии 1, соответствующий случаю $r=0$, является оптимальным.

Выше через $S_a(\cdot)$ мы обозначили левую часть неравенства (1.2). Если положить $a(\xi) = |\xi|^\beta$, то неравенство $S_a(\xi) \le 1$ выполнено при $|\xi|^{2\beta} \le \lambda_1$, или, что равносильно, при

$$|\xi| \le \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/(2\beta)}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/(2(\alpha-\beta))} r_0.$$

Следовательно, указанные в формулировке методы $\widehat{m}_r$ являются оптимальными. $\square$

Доказательство следствия 2. Пусть $\alpha > 0$, $f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$ и $f(\cdot) \ne 0$. Тогда, очевидно, $(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot) \ne 0$. Рассмотрим функцию

$$f_1(\cdot) = \frac{f(\cdot)}{\|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}}.$$

Эта функция допустима в задаче (2.1) при

$$\delta = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\|F[f_1](\cdot)\|_{L_2(A)} = \frac{\|F[f](\cdot)\|_{L_2(A)}}{(2\pi)^{d/2}\|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}}. \tag{2.19}$$

Следовательно, значение максимизируемого функционала в задаче (2.1) на функции $f_1(\cdot)$ не больше, чем значение этой задачи. Так как $r_A \ge \widehat{r}$, то это означает, что

$$\|(-\Delta)^{\beta/2} f_1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \left\| \frac{(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot)}{(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \delta^{(\alpha-\beta)/\alpha}.$$

Подставляя сюда вместо δ его выражение из (2.19), получаем неравенство (1.3).

Если $r_A = \infty$, то согласно теореме Планшереля выражение в скобках в (1.3) равно норме функции в $L_2(\mathbb{R}^d)$ и тем самым справедливо неравенство (1.4).

Заметим, что неравенство (1.4) есть аналог для дробных степеней оператора Лапласа известного неравенства Харди–Литтлвуда–Полиа для функции и ее производных на прямой (см. [1]). $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Харди Г.Г., Литтльвуд Дж.Е., Полиа Г.* Неравенства. Москва: Изд-во иностр. лит., 1948.
2. *Магарил-Ильяев Г.Г., Сивкова Е.О.* Наилучшее восстановление оператора Лапласа функции по ее неточно заданному спектру // Мат. сб. 2012. Т. 203, № 4. С. 119–130.
3. *Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* Выпуклый анализ: Теория и приложения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2024.
4. *Осипенко К.Ю.* Введение в теорию оптимального восстановления. СПб.: Лань, 2022.
5. *Сивкова Е.О.* Об оптимальном восстановлении лапласиана функции по ее неточно заданному преобразованию Фурье // Владикавк. мат. журн. 2012. Т. 14, № 4. С. 63–72. MathNet
6. *Сивкова Е.О.* Наилучшее восстановление лапласиана функции и точные неравенства // Фунд. и прикл. математика. 2013. Т. 18, № 5. С. 175–185. MathNet
7. *Сивкова Е.О.* Оптимальное восстановление дробных степеней разностного оператора Лапласа // Мат. сб. 2025. Т. 216, № 3. С. 191–202.