Об оценке погрешности эрмитовой интерполяции обобщенно-полиномиальными сплайнами

Демидович В. Б. (Москва, Россия)

Для эрмитовой сплайн-интерполяции в случае, когда сплайны конструируются из гладких чебышевских обобщенных полиномов [1]–[3], приводится структурная формула оценки погрешности на классах функций с ограниченными производными соответствующих порядков. Результаты примыкают к исследованиям [4]–[7].

Пусть $\{e_i(t)\}_0^\infty \in C^{(\infty)}[a,b]$ — ECT-система, определяющая пространство гладких чебышевских обобщенных полиномов $\pi[a,b] =: \mathrm{span}\{e_i(t)\}_0^\infty$, в своем равномерном замыкании совпадающее с $C[a,b]$. Пусть, далее, $\Delta_N : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N < t_{N+1} = b$ — разбиение промежутка $[a,b] \subset \mathbb{R}$, определяющее пространство гладких чебышевских обобщенно-полиномиальных сплайнов $S_n^\nu(\Delta_N) = \{s(t)\}$ *порядка* $n \geq 0$, *гладкости* $\nu \geq 0$, и тем самым любой его элемент $s(t) \in S_n^\nu(\Delta_N)$ на каждом из интервалов (t_j, t_{j+1}) $(j = \overline{0,N})$ совпадает с некоторым гладким чебышевским обобщенным полиномом порядка $\leq n$ из пространства $\pi[a,b]$, а в узлах "стыков" таких полиномов $\{t_j\}_1^N$ характеризуется гладкостями $\{\nu_j\}_1^N$, где $\min_j \nu_j =: \nu$ (так что $s(t) \in C^{(\nu)}[a,b]$). Рассматривается проблема эрмитовой интерполяции функции $x(t) \in C^{(n)}[a,b]$, заданной в попарно-различных узлах $\{\xi_k\}_0^p \in [a,b]$ $(p \geq 0)$ таблицей вида

$$\{x^{(l)}(\xi_k) : k = \overline{0,p}, \quad l = \overline{0,q_k}, \quad 0 \leq q_k \leq n, \quad \sum_{k=0}^{p}(q_k+1) = (n+1) + N\cdot(n-\nu)^+\}$$

(здесь и далее индекс "+" означает "срезку"), сплайном $s(t;x) \in S_n^\nu(\Delta_N)$, удовлетворяющим условиям

$$s^{(l)}(\xi_k;x) = x^{(l)}(\xi_k) \quad (k = \overline{0,p}; \quad l = \overline{0,q_k}).$$

Используя некоторые характеристики чебышевских систем, в частности, такие понятия, как:

$K_j(\cdot,\cdot)$ — обобщенно-полиномиальное ядро (порядка j) ECT-системы;
$D_j[\cdot]$ — оператор обобщенного дифференцирования (порядка j) в силу ECT-системы;
$\overline{\theta}_j := \max_t |D_j[e_j(t)]|$, $\underline{\theta}_j := \min_t |D_j[e_j(t)]|$, $\theta_j := \overline{\theta}_j/\underline{\theta}_j$ — "кардинальные" константы (порядка j) ECT-системы,

и вводя классы функций $W^{(j)}[M_j;a,b] = \{x(t)\}$ $(j \geq 1)$, где $\|D_j[x(t)]\|_{C[a,b]} \leq M_j$, устанавливается

Утверждение. *Если*

$$x(t) \in W^{(n+1)}[M_{n+1};a,b],$$

то для погрешности сплайна $s(t;x) \in S_n^\nu(\Delta_N)$ *справедлива структурная оценка*

$$\|x(t) - s(t;x)\| \leq \frac{M_{n+1}}{\underline{\theta}_{n+1}} \cdot \|F_{n+1}(t)\|,$$

где

$$F_{n+1}(t) = K_{n+1}(t;\ a) + \sum_{i=0}^{n}\alpha_i K_i(t;\ a) + \sum_{j=1}^{N}\Big(2(-1)^j\theta_{n+1}^j K_{n+1}^+(t;\ t_j) + \sum_{k=\nu+1}^{n}\beta_{kj}K_k^+(t;\ t_j)\Big)$$

— *функция, чьи числовые параметры* $\{\alpha_i\}_{i=0}^{n}$, $\{\beta_{kj}\}_{k=\nu+1}^{n}{}_{j=1}^{N}$ *могут быть конкретизированы в каждой конкретной задаче эрмитовой интерполяции обобщенно-полиномиальным сплайном.*

Литература

[1] С. Карлин, В. Стадден, Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике, М.: Наука, 1976.

[2] В. Б. Демидович, Приближенные вычисления с помощью обобщенных полиномов из чебышевских пространств: чебышевские обобщенные полиномы, М.: Изд-во Московск. ун-та, 1990.

[3] В. Б. Демидович, Приближенные вычисления с помощью обобщенных полиномов из чебышевских пространств: простое интерполирование, кратное интерполирование, формулы тэйлоровского типа, М.: Изд-во Московск. ун-та, 1994.

[4] В. Н. Малоземов, А. Б. Певный, О сплайн-интерполяции, Матем. заметки, 26:6 (1979), 817–822.

[5] А. А. Васильев, В. Н. Малоземов, А. Б. Певный, Интерполяция и аппроксимация сплайнами произвольного дефекта, Вестник Ленинградск. ун-та, 19 (1979), 23–30.

[6] В. Н. Малоземов, А. Б. Певный, Полиномиальные сплайны, Л.: Изд-во Ленинградск. ун-та, 1986.

[7] В. С. Романов, Кратная интерполяция чебышевскими сплайнами, Методы вычислений, вып. 13: Решение функциональных уравнений и смежные вопросы, Л.: Изд-во Ленинградск. ун-та, 1983, 186–202.